已知常態分佈（normal distribution，也稱作高斯分佈 Gaussian distribution）機率函數為

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

現在若考慮一個「平均值 $\mu=0$」的三度空間「均向性」（isotropic）的常態分佈函數，

$$f(x,y,z)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-y^2}{2\sigma^2})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-z^2}{2\sigma^2})\right]$$

這個均向性的機率函數滿足

$$\iiint f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-y^2}{2\sigma^2})\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(\frac{-z^2}{2\sigma^2})\right]dx\,dy\,dz=1$$

它也可以改寫為球面坐標的形式

$$1=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\infty}r^2\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}\exp(\frac{-r^2}{2\sigma^2})dr=\int_0^{\infty}\frac{4\pi r^2}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3}\exp(\frac{-r^2}{2\sigma^2})dr=\int_0^{\infty}f(r)dr$$

其中

$$f(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{r^2}{\sigma^3}\exp(\frac{-r^2}{2\sigma^2})$$ is the Maxwell-Boltzmann distribution.

(a) 請給定三個不同的 σ ，繪出三條 $f(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{r^2}{\sigma^3}\exp(\frac{-r^2}{2\sigma^2})$ 的圖形。請取縱軸為 f 、橫軸為 r。

（解答可參考 http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell–Boltzmann_distribution 的結果。）

若將上述變數 (x,y,z) 改為 (v_x,v_y,v_z) 且令 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$ ，可得 Maxwell speed distribution

$$f(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^2}{\sigma^3}\exp(\frac{-v^2}{2\sigma^2})$$

由於溫度正比於速度分佈函數的變異數（variance）。

Let $\sigma^2=k_BT/m$, where k_B is the Boltzmann constant, T is in unit of ºK. We have

$$f(v)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{v^2}{(k_BT/m)^{3/2}}\exp(\frac{-mv^2}{2k_BT})\quad\text{or}\quad f(v)=\frac{4\pi v^2}{(2\pi k_BT/m)^{3/2}}\exp(\frac{-mv^2}{2k_BT})$$ （即課本(6.50)式的分佈函數）

(b) 閱讀課本 6.4 節，用一頁的篇幅，簡單摘錄重點與結論。

(c) 如果氣體或電漿的平均速度 **V** 不為零，試著證明平行該平均速度方向的速率分佈函數為

$$f(v)=\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{v^2}{(k_BT/m)^{3/2}}[\frac{k_BT}{mvV}\sinh(\frac{mvV}{k_BT})]\exp[\frac{-m(v^2+V^2)}{2k_BT}]$$

where $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ （本題難度 4 級）(我記得這部分解應該是 $\sqrt{8}$ 不是 $\sqrt{2}$ ，仍待確認中！)

(d) 繪出 兩組平均速度 **V** 不為零之分佈函數。其中一組 $V^2>>\frac{k_BT}{m}$ 。另一組 $0<V^2<\frac{k_BT}{m}$