熱力學作業 1.2　　　　Thermodynamics : Home Work 1.2

(a) 有一個 k 面的骰子，出現 1～k 點的機率均為$1/k$ 。若擲此均勻公正的骰子 n 次，所出現之「點數和 x 」的機率分布為 $f_{k,n}(x)$ 。求此分布函數 $f_{k,n}(x)$ ，以及它的平均值$\mu_{k,n}$ （mean 或稱「期望值」expectation value）、變異數$(Var.)_{k,n}$ （variance）、標準差$\sigma_{k,n}$ （standard deviation）。並將結果填入下表。

	n	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
$k=2$ 代幣骰子： 一面 1 點、 一面 2 點	$\mu_{k=2,n}$	1.5	3	4.5	6	7.5	9
	$(Var.)_{k=2,n}$						
	$\sigma_{k=2,n}$						
$k=4$ 金字塔 骰子	$\mu_{k=4,n}$	2.5	5	7.5	10	12.5	15
	$(Var.)_{k=4,n}$						
	$\sigma_{k=4,n}$						
$k=6$ 立方骰子	$\mu_{k=6,n}$	3.5	7	10.5	14	17.5	21
	$(Var.)_{k=6,n}$						
	$\sigma_{k=6,n}$						

(b) 根據你初步算出來的結果，利用歸納法，找出 $f_{k,n}(x)$ 的規律性，然後寫一個程式，由輸入的 k 與 n ，求出 $f_{k,n}(x)$ 。輸出 $f_{k,n}(x)$ 並繪出 $f_{k,n}(x)$ 的分佈圖。

Note: 根據過去的經驗，學生都懶得算 $f_{k,n}(x)$ ，以至於學習成效不佳。因此現在老師利用歸納法，找出 $f_{k,n}(x)$ 的規律性，並且寫了一個程式，放在附錄中，供同學們使用。同學們請根據輸出的結果，繪出 $f_{k,n}(x)$ 的分佈圖，並且計算依照 $f_{k,n}(x)$ 來分布的亂數之標準差與變異數。（此題中的「亂數」就是「可能出現的點數和」）

(c) 有兩群亂數，其中一群亂數是根據(b)小題中的 $f_{k,n}(x)$ 機率函數來分佈，另一群亂數是根據常態分佈函數（normal distribution function）來分佈。若此兩群亂數，具有相同的「平均值」與「變異數」，請比較這兩群亂數的機率分佈之間的差異性。（也就是比較 $f_{k,n}(x)$ 與常態分佈函數之間的差異。）縱軸最好是取對數尺度，比較容易看出兩者之間的差異。

(d) 由這個作業結果，以下哪些結論是正確的？（　　　　　　　　　　　　）

(1) 重覆實驗 N 次，所得點數和的機率分佈之平均值，為實驗一次所得點數機率分佈平均值的 N 倍。

(2) 重覆實驗 N 次，所得點數和的機率分佈之標準差，為實驗一次所得點數機率分佈標準差的 N 倍。

(3) 重覆實驗 N 次，所得點數和的機率分佈將越來越接近常態分佈。

(4) 只要給定平均值與標準差，就可以決定常態分佈之形式。

(5) 只要給定平均值與標準差，就可以決定任何一個機率函數分佈之形式。

附錄：

FORTRAN Program to find $f_{k,n}(x)$

(Modifying the parameters k and n can yield different distribution functions)

```
C======================================================================
C23456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012
C======================================================================
      program test_dice
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(k=6, n=2, ntotal=k**n, ndim=k*n)  ! only good for n<11
      dimension ip(ndim),aip(ndim),bip(ndim)
      k0=k
      n0=n
      do i=1,ndim
      ip(i)=0
      enddo
      do i=1,ntotal
      idice=0
      j=i-1
      do kk=n,1,-1
      m=(j/k0**(kk-1))+1
      idice=idice+m
      j=j-(m-1)*k0**(kk-1)
      enddo
      ip(idice)=ip(idice)+1
      enddo
      write(*,*) ip
C
      iptotal=0
      do i=1,ndim
      iptotal=iptotal+ip(i)
      enddo
C
      do i=1,ndim
      aip(i)=ip(i)/dfloat(iptotal)
      enddo
      bip(1)=aip(1)
      do i=2,ndim
      bip(i)=aip(i)+bip(i-1)
      enddo
C
      write(1,*) 'k=',k0,'n=',n0, 'k^n=', ntotal, 'output='
      write(1,*)
     +'    x   f(x)*k^n       f(x)_PDF                F(x)_CDF'
      write(1,1) (j, ip(j), aip(j),bip(j),j=1,ndim)
    1 format((1x,I5, 1x, I7, 1x, G22.7, 1x, G22.7))
      stop
      end
```

Example of output. (The following results are obtained after modifying the parameter n in above program, from n=2 to n=5.)

```
[lyu@bearf TD]$ cat fort.1
 k= 6 n= 5 k^n= 7776 output=
     x   f(x)*k^n       f(x)_PDF               F(x)_CDF
     1       0           0.000000               0.000000
     2       0           0.000000               0.000000
     3       0           0.000000               0.000000
     4       0           0.000000               0.000000
     5       1          0.1286008E-03          0.1286008E-03
     6       5          0.6430041E-03          0.7716049E-03
     7      15          0.1929012E-02          0.2700617E-02
     8      35          0.4501029E-02          0.7201646E-02
     9      70          0.9002058E-02          0.1620370E-01
    10     126          0.1620370E-01          0.3240741E-01
    11     205          0.2636317E-01          0.5877058E-01
    12     305          0.3922325E-01          0.9799383E-01
    13     420          0.5401235E-01          0.1520062
    14     540          0.6944444E-01          0.2214506
    15     651          0.8371914E-01          0.3051698
    16     735          0.9452160E-01          0.3996914
    17     780          0.1003086              0.5000000
    18     780          0.1003086              0.6003086
    19     735          0.9452160E-01          0.6948302
    20     651          0.8371914E-01          0.7785494
    21     540          0.6944444E-01          0.8479938
    22     420          0.5401235E-01          0.9020062
    23     305          0.3922325E-01          0.9412294
    24     205          0.2636317E-01          0.9675926
    25     126          0.1620370E-01          0.9837963
    26      70          0.9002058E-02          0.9927984
    27      35          0.4501029E-02          0.9972994
    28      15          0.1929012E-02          0.9992284
    29       5          0.6430041E-03          0.9998714
    30       1          0.1286008E-03           1.000000
```