

Vector Products

乘法分配率

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

向量的內積 **inner product**

$$(a\hat{x} + b\hat{y}) \cdot (c\hat{x} + d\hat{y}) = ac + bd$$

向量的外積 **cross product or outer product**

$$(a\hat{x} + b\hat{y}) \times (c\hat{x} + d\hat{y}) = ad\hat{z} + bc(-\hat{z}) = \hat{z}(ad - bc)$$

向量的平行積 **dyad product** (本學期後面會學到)

$$(a\hat{x} + b\hat{y})(c\hat{x} + d\hat{y}) = \hat{x}\hat{x}ac + \hat{x}\hat{y}ad + \hat{y}\hat{x}bc + \hat{y}\hat{y}bd$$

- Scalar純量 a 是零階張量 (zero-rank tensor) {只有大小，沒有方向}
- Vector向量 $a\hat{x}$ 是一階張量 (first-rank tensor) {有大小，有一個方向}
- $\hat{x}\hat{x}ac$ 是二階張量 (2nd-rank tensor) {有大小，有兩個方向}

懇求大家，拜託大家，

作答時，寫報告時，千萬不要出現 $(\vec{v})^2$

因為 $(\vec{v})^2$ 可能是

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$$

也可能是

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

也可能是

$$\vec{v}\vec{v}$$

所以，請不要寫 $(\vec{v})^2$ ，請寫 $|\vec{v}|^2$ 或 v^2 ，謝謝大家的配合！

向量內積 & 外積的“幾何意義”與應用

inner product 的幾何意義：

一個向量 \vec{A} 在另一個向量 \vec{B} 上的投影與 \vec{B} 向量大小的乘積。

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

where θ is the angle between the vectors \vec{A} and \vec{B} 。

outer product 的幾何意義：

一個向量 \vec{A} 與另一個向量 \vec{B} 所撐出來的平行四邊形的面積，方向依照右手定則，垂直此平行四邊形所在平面的方向。

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

應用1：若 $\vec{A} = a\hat{x} + b\hat{y}$ $\vec{B} = c\hat{x} + d\hat{y}$

則 $\cos \theta = (ac + bd) / \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

由此可求得 \vec{A} and \vec{B} 夾角 $\theta = \cos^{-1}[(ac + bd) / \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}]$

向量內積 & 外積的“幾何意義”與應用

- **應用2**：若已知不平行的兩個向量 \vec{A} and \vec{B} ，請找出三個互相垂直的基底(basis) $\{\hat{e}_1 \ \hat{e}_2 \ \hat{e}_3\}$ ，其中之一 \hat{e}_1 ，沿著向量 \vec{A} ，另一個 \hat{e}_2 落在由兩向量 \vec{A} and \vec{B} 所稱出來的平面上。
- 依照題意，取第一個基底向量 $\hat{e}_1 = \vec{A}/|\vec{A}|$
- 兩個向量 \vec{A} and \vec{B} 不平行，故 $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{0}$. 可取 第三個基底向量
$$\hat{e}_3 = \vec{A} \times \vec{B} / |\vec{A} \times \vec{B}|$$
- 由右手定則可得 $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$

Vector and Tensor Notations

如果是向量，請標示向量，或用Boldface (粗體字)

• \vec{v} , \vec{v} , or \boldsymbol{v}

• $\vec{F} = \vec{P} \cdot \vec{A}$ $\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$

• $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$

• Vector differential operators

直角坐標
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

柱面坐標
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial s_r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial s_\theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial s_z} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

球面坐標
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial s_r} + \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial s_\theta} + \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial s_\phi} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

注意： ∇ 的因次 (dimension) 為 L^{-1} ，所以分母必須是一個長度，而不只是角度。

Vector differential operators ∇ 的歷史故事

- 愛爾蘭著名的科學家 Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) 在提出他的 Hamiltonian operator 時，用 ∇ 來表示其中空間向量微分的運算子。愛爾蘭紀念 Hamilton 200歲冥誕所發行的10歐元金幣，就將這個符號刻在紀念金幣上。
- ∇ 長得像把希臘字母 Delta Δ 上下顛倒過來
- 我們在讀方程式的時候，見到 ∇ 時通常讀作 Del (當然如果明顯是梯度、旋度、散度時，我們可能直接讀作 gradient, curl, divergence) 但是有時會出現 $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ 這樣的表示式時，我們就會將它讀作 Del，但是也可讀作 Nabla.
- 我們在方程式輸入時，打「倒三角」 ∇ ，是輸入 `\nabla`。
- Nabla 是希伯來的豎琴 (Hebrew harp) 但是希伯來語稱為 Nevel，阿拉姆語 (Aramaic) 才稱為 Nabla。
- 根據 Wikipedia 中對 harp 的介紹，這是一個非常古老的樂器，從兩河流域開始，向外，傳到非洲、歐洲、西亞、中亞、南亞、東亞、中國，都有此樂器的蹤影。
- 國樂中也有豎琴嗎？上網詢問谷歌大神，看到百度有解答！原來是一個幾乎失傳的宮廷樂器，叫做「箜篌」。為什麼會失傳？百度上有解說。



箜篌：敦煌壁畫上常出現的樂器

- 介紹「箜篌」前，先聽一段用箜篌演奏曲，
<https://www.youtube.com/watch?v=JkBPec3zK9c>
- 箜篌分為「臥箜篌」與「豎箜篌」兩種。臥箜篌源於春秋時期的楚國。豎箜篌在漢靈帝時期自西域傳入，又稱胡箜篌。所以應該就是西方的豎琴。但豎箜篌經過改製，適合國樂的音色，所以已經與西樂所用的豎琴不同了。
- 據說，箜篌的「箜」表示此樂器發出來的聲音特性，「篌」是因為第一位製造此樂器的人姓「侯」。豎箜篌，經過改良，有唐箜篌、明箜篌。唐以後的箜篌，都指豎箜篌。
- 根據百度百科上的說法，此樂器盛行於唐，所以也有些傳到日本。它是龜茲石窟與敦煌石窟壁畫中常出現的樂器。可惜我兩度參觀敦煌石窟，都沒注意到壁畫上有此樂器。百度上說，因為一些皇室把箜篌視為宮廷樂器，不讓外人學習。所以等專精此樂器的樂師凋零後，就後繼無人而失傳了。
<https://baike.baidu.com/item/箜篌/339401>
<https://blog.xuite.net/lyonhealy/harppu/125544309-國寶樂器箜篌與西洋豎琴的區別>
<https://www.bilibili.com/read/cv2083791>（此文詳細描述箜篌與古箏的異同與興衰）