本教材 幫助學生 解讀 維基百科 Wikipedia 維基百科 Wikipedia Lagrange point 一文中估算 L1, L2, L3 位置 部分的內容。

穩定打轉的雙星系統，兩星球相距a，質量分別為 M_1 與 M_2。它們必須繞著其共同質心打轉，否則萬有引力將兩星球愈拉越近，最後會撞再一起。在此兩星球繞轉的旋轉座標系中，兩星球相對位置不改變。因此兩星球所受的離心力與受到對方的萬有引力，大小相等，方向相反。根據質心的定義，就像玩蹺蹺板一樣，，M_1 與 M_2應該分別位在質心的兩側，分別距離質心r_1 與 r_2。我們可以證明

$$r_1 = a\frac{M_2}{M_1 + M_2} \tag{1}$$

$$r_2 = a\frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{2}$$

若兩星球繞轉的角速度為 ω ，則M_1星球所受到的萬有引力與離心力，大小相等，方向相反。可得

$$\frac{GM_1M_2}{a^2} = M_1\omega^2 r_1 = M_1\omega^2\left(a\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right) \tag{3}$$

同理，M_2星球所受到的萬有引力與離心力，大小相等，方向相反。可得

$$\frac{GM_1M_2}{a^2} = M_2\omega^2 r_2 = M_2\omega^2\left(a\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) \tag{4}$$

以上(3)&(4)兩式，都得到

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \tag{5}$$

在此旋轉座標系的雙星旋轉面上，可以找到一個 effective potential V_{eff} 分佈

$$V_{eff}(\vec{r}) = -\frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} - \frac{\omega^2|\vec{r}|^2}{2} \tag{6}$$

在 x-y 旋轉面上，此 effective potential V_{eff} 在五個點上滿足

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial x} = \frac{\partial V_{eff}}{\partial y} = 0$$

這五個點就是五個 Lagrange points: L1, L2, L3, L4, & L5 其中 L4 and L5 與雙星成正三角形分佈。L4 位在小質量星球前進方向。（詳情請參閱另一份補充教材）。L1, L2, L3 與雙星位在同一直線上， L1 位在雙星之間，靠近小質量星球。L2, L3 位在雙星外側，其中 L2 靠近小質量星球，L3 靠近大質量星球，且 L3 與大質量星球的距離和雙星距離相當接近。以下介紹如何估算 L1, L2, L3 的位置。

L1 的位置

考慮一個「極小質量的星體」，質量為 m。如果 $M_1 > M_2 \gg m$, 則將極小質量的星體 m 放在 L1 的位置，它在旋轉座標系所受到的萬有引力與離心力和等於零。因此可以估算 L1 的位置。如果 L1 的位置與小質量星體M_2的距離為 r，則將極小質量的星體 m 放在 L1 的位置，它在旋轉座標系受到 toward M_2 的淨力為

$$\frac{GM_2m}{r^2} - \frac{GM_1m}{(a-r)^2} + m\omega^2(r_2 - r) = 0 \tag{7}$$

將(5)式代入上式(7)，消去ω^2，並將結果化簡為r/a 的函數形式，得

$$\frac{M_2/M_1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{r}{a}\right)^2} + \left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{M_2}{M_1}} - \frac{r}{a}\right) = 0 \tag{8}$$

如果$M_1 \gg M_2$ 則 $r \ll a$，因此上式(8)可以對$x = r/a$ 泰勒展開式展開

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{x^2} - (1 + 2x + \cdots) + 1 - \left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x = 0 \tag{9}$$

Or, approximately

$$\frac{M_2}{M_1} - \left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)x^3 \approx 0 \tag{10}$$

Thus, we have the approximate solution of x

$$x \approx \sqrt[3]{\frac{\frac{M_2}{M_1}}{\left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)}} \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \tag{11}$$

也就是說，L1 位在雙星之間，與小質量星球M_2 的距離約

$$r = xa \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}\,a \tag{12}$$

如果 兩星球質量差異不大，以至於(11)式所得到的 x 不滿足 $x \ll 1$ 則必須直接求解方程式(8)，也就是直接求解以下方程式

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} + 1 - \left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x = 0 \tag{13}$$

通分後得

$$\frac{M_2}{M_1}(1-x)^2 - x^2 + \left[1 - \left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right](1-x)^2x^2 = 0 \tag{14}$$

因為通分的結果，(14)式的解會有增根，只有滿足 $0 < x < r_2/a$ 的根，才是解。

Example 1 : For $M_2/M_1 = 1/243$, $r \approx a/9$
Example 2 : For $M_2/M_1 = 1/3$, $r \approx ?\, a$

L2 的位置

同理，將極小質量的星體 m 放在 L2 的位置，它在旋轉座標系所受到的萬有引力與離心力和等於零。因此可以估算 L2 的位置。如果 L2 的位置與小質量星體M_2的距離為 r，則將極小質量的星體 m 放在 L2 的位置，它在旋轉座標系受到 toward M_2 的淨力為

$$\frac{GM_2m}{r^2}+\frac{GM_1m}{(a+r)^2}-m\omega^2(r_2+r)=0 \tag{15}$$

將(5)式代入上式(15)，消去ω^2，並將結果化簡為r/a 的函數形式，得

$$\frac{M_2/M_1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^2}-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{M_2}{M_1}}+\frac{r}{a}\right)=0 \tag{16}$$

如果$M_1 \gg M_2$ 則 $r \ll a$，因此上式(16)可以對$x=r/a$ 泰勒展開式展開

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{x^2}+(1-2x+\cdots)-1-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x=0 \tag{17}$$

Or, approximately

$$\frac{M_2}{M_1}-\left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)x^3\approx 0 \tag{18}$$

Thus, we have the approximate solution of x

$$x\approx\sqrt[3]{\frac{\frac{M_2}{M_1}}{\left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)}}\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} \tag{19}$$

也就是說，L2 位在小質量星球M_2的外側，與小質量星球M_2 的距離約

$$r=xa\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}\,a \tag{20}$$

同樣的，如果 兩星球質量差異不大，以至於(19)式所得到的 x 不滿足 $x \ll 1$ 則必須直接求解方程式(16)，也就是直接求解以下方程式

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\left[1+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right]=0 \tag{21}$$

通分後得

$$\frac{M_2}{M_1}(1+x)^2+x^2-\left[1+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right](1+x)^2x^2=0 \tag{22}$$

因為通分的結果，(22)式的解會有增根，估計只有滿足 $0<x<r_1/a$ 的實根，才是解。

Example 1 : For $M_2/M_1=1/243$, $r\approx a/9$

Example 2 : For $M_2/M_1=1/3$, $r\approx ?\,a$

L3 的位置

將極小質量的星體 m 放在 L3 的位置，它在旋轉座標系所受到的萬有引力與離心力和等於零。因此可以估算 L3 的位置。因為 L3 的位置距離以M_1為圓心，a為半徑的大圓（通過 L4,M_2, L5 的大圓）不遠，且位在大圓內側。則將極小質量的星體 m 放在 L3 的位置，它所受 toward M_2 的淨力為

$$\frac{GM_2m}{(2a-r)^2}+\frac{GM_1m}{(a-r)^2}-m\omega^2(r_1+a-r)=0 \tag{23}$$

將(5)式代入上式(23)，消去ω^2，並將結果化簡為r/a 的函數形式，得

$$\frac{M_2/M_1}{\left(2-\frac{r}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1-\frac{r}{a}\right)^2}-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\left(\frac{\frac{M_2}{M_1}}{1+\frac{M_2}{M_1}}+1-\frac{r}{a}\right)=0 \tag{24}$$

如果$M_1>M_2$ 則 $r\ll a$，因此上式(24)可以對$x=r/a$ 泰勒展開式展開

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{4}\left(1+2\frac{x}{2}+\cdots\right)+(1+2x+\cdots)-\frac{M_2}{M_1}-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(1-x)=0 \tag{25}$$

Or, approximately

$$\frac{1}{4}\frac{M_2}{M_1}-\left(2\frac{M_2}{M_1}\right)+x\left[\frac{1}{4}\frac{M_2}{M_1}+2+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)\right]\approx 0 \tag{26}$$

Thus, we have the approximate solution of x

$$x\approx\frac{\frac{7}{4}\frac{M_2}{M_1}}{3+\frac{5}{4}\frac{M_2}{M_1}} \tag{27}$$

If

$$\frac{5}{4}\frac{M_2}{M_1}\ll 3$$

then equation (27) can be approximately rewritten as

$$x\approx\frac{7}{12}\frac{M_2}{M_1} \tag{28}$$

同樣的，如果 兩星球質量差異不大，以至於(27)式所得到的 x 不滿足 $x\ll 1$ 則必須直接求解方程式(24)，也就是直接求解以下方程式

$$\frac{M_2}{M_1}\frac{1}{(2-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{M_2}{M_1}-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(1-x)=0 \tag{29}$$

通分後得

$$\frac{M_2}{M_1}(1-x)^2+(2-x)^2-\left[\frac{M_2}{M_1}+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(1-x)\right](1-x)^2(2-x)^2=0 \tag{30}$$

因為通分的結果，(30)式的解會有增根，估計只有滿足 $0<x<r_1/a$ 的實根，才是解。

Example 1 : For $M_2/M_1=1/243$, $r\approx 7a/2916$
Example 2 : For $M_2/M_1=1/3$, $r\approx 7a/36\approx 0.1944a$

總結

	$M_1 \gg M_2$	$M_1 > M_2$
L1 的位置與M_2的距離為 r	$\frac{r}{a}=x\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$	Solution of Equation (8) or (14)
L2 的位置與M_2的距離為 r	$\frac{r}{a}=x\approx\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$	Solution of Equation (16) or (22)
L3 的位置與大圓的距離為 r	$\frac{r}{a}=x\approx\frac{7}{12}\frac{M_2}{M_1}$	Solution of Equation (24) or (30)

Example 1 : 若 $M_2/M_1=1/243$, 則

L1 的位置在兩星球之間，距離小質量星體M_2的距離為 $r\approx a/9$

L2 的位置在小質量星體M_2星球的外側，距離小質量星體M_2的距離為 $r\approx a/9$

L3 的位置在M_2與 L4, L5 所構成的大圓內側，距離大圓 $r\approx 7a/2916$

Example 2 : 若 $M_2/M_1=1/3$, 則

用 MATLAB 估算 L1, L2, & L3 的位置

Equation (14)

$$\frac{M_2}{M_1}(1-x)^2-x^2+\left[1-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right](1-x)^2x^2=0$$

can be rewritten as

$$\frac{M_2}{M_1}(1-2x+x^2)-x^2+\left[(x^2-2x^3+x^4)-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(x^3-2x^4+x^5)\right]=0$$

or

$$\frac{M_2}{M_1}-2\frac{M_2}{M_1}x+\frac{M_2}{M_1}x^2-\left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)x^3+\left(3+2\frac{M_2}{M_1}\right)x^4-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x^5=0 \qquad (31)$$

Likewise, Equation (22)

$$\frac{M_2}{M_1}(1+x)^2+x^2-\left[1+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right](1+x)^2x^2=0$$

can be rewritten as

$$\frac{M_2}{M_1}(1+2x+x^2)+x^2-\left[(x^2+2x^3+x^4)+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(x^3+2x^4+x^5)\right]=0$$

or

$$\frac{M_2}{M_1}+2\frac{M_2}{M_1}x+\frac{M_2}{M_1}x^2-\left(3+\frac{M_2}{M_1}\right)x^3-\left(3+2\frac{M_2}{M_1}\right)x^4-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x^5=0 \qquad (32)$$

Similarly, Equation (30)

$$\frac{M_2}{M_1}(1-x)^2+(2-x)^2-\left[\frac{M_2}{M_1}+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)(1-x)\right](1-x)^2(2-x)^2=0$$

can be rewritten as

$$\frac{M_2}{M_1}(1-2x+x^2)+(4-4x+x^2)-\left[\left(1+2\frac{M_2}{M_1}\right)-\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x\right](4-12x+13x^2-6x^3+x^4)=0$$

or

$$-7\frac{M_2}{M_1}+\left(12+26\frac{M_2}{M_1}\right)x-\left(24+37\frac{M_2}{M_1}\right)x^2+\left(19+25\frac{M_2}{M_1}\right)x^3-\left(7+8\frac{M_2}{M_1}\right)x^4+\left(1+\frac{M_2}{M_1}\right)x^5=0 \quad (32)$$

```
%Using MATLAB function “roots” to find Polynomial roots
% roots of p5 * x^5 + p4 * x^4 + p3 * x^3 +p2 * x^2 + p1 * x + p0
% p = [p5 p4 p3 p2 p1 p0];
% x = roots(p)
%
% Let f=M2/M1
f=1/3;
%Solution of Equation (31)
p5=-(1+f);
p4=(3+2*f);
p3=-(3+f);
p2=f;
p1=-2*f;
p0=f;
p = [p5 p4 p3 p2 p1 p0];
x1 = roots(p)
%Solution of Equation (32)
p5=-(1+f);
p4=-(3+2*f);
p3=-(3+f);
p2=f;
p1=2*f;
p0=f;
p = [p5 p4 p3 p2 p1 p0];
x2 = roots(p)
%Solution of Equation (33)
p5=(1+f);
p4=-(7+8*f);
p3=+(19+25*f);
p2=-(24+37*f);
p1=+(12+26*f);
p0=-7*f;
p = [p5 p4 p3 p2 p1 p0];
x3 = roots(p)

Output of MATLAB
x1 =

   1.3941 + 0.7579i
   1.3941 - 0.7579i
  -0.2138 + 0.4576i
  -0.2138 - 0.4576i
```

```
   0.3893 + 0.0000i

x2 =

  -1.3552 + 0.8047i
  -1.3552 - 0.8047i
   0.5159 + 0.0000i
  -0.2778 + 0.3434i
  -0.2778 - 0.3434i

x3 =

   1.9988 + 0.4675i
   1.9988 - 0.4675i
   1.5528 + 0.6460i
   1.5528 - 0.6460i
   0.1468 + 0.0000i
```

若 $M_2/M_1 = 1/3$，方程式(31)只有一個實根為 x1=0.3893，方程式(32)只有一個實根為 x2=0.5159，方程式(33)只有一個實根為 x3=0.1468。因此 若 $M_2/M_1 = 1/3$, 則

L1 的位置在兩星球之間，距離小質量星體M_2的距離為 $r \approx 0.3893a$

L2 的位置在小質量星體M_2星球的外側，距離小質量星體M_2的距離為 $r \approx 0.5159a$

L3 的位置在M_2與 L4, L5 所構成的大圓內側，距離大圓 $r \approx 0.1468a$

當 $M_2/M_1 = 1/3$ 時與維基百科上的近似值比較：

L1 與 M_2 距離 r : 近似值 $\frac{r}{a} \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 0.4807$　　大於　實際值：$\frac{r}{a} \approx 0.3893$

L2 與 M_2 距離 r : 近似值 $\frac{r}{a} \approx \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 0.4807$　　小於　實際值：$\frac{r}{a} \approx 0.5159$

L3 與大圓距離 r : 近似值 $\frac{r}{a} \approx \frac{7}{36} = 0.1944$　　大於　實際值：$\frac{r}{a} \approx 0.1468$

與數值方法找到的 L1, L2, L3 位置比較：

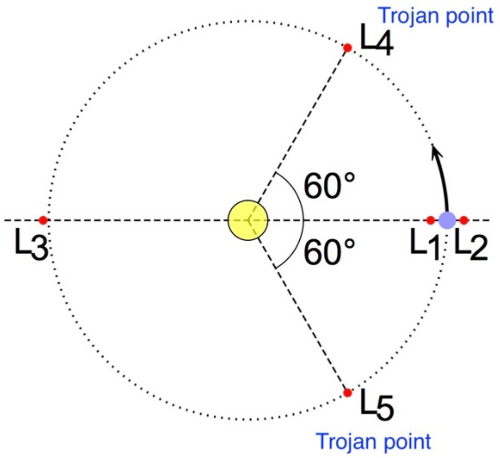
你們的學長 彭楷庭同學 曾用用數值方法找 effective potential 沿 x 軸的 local maxima

```
x_profile=linspace(-3*a,3*a);
x_profile=linspace(-3*a,3*a,100);
x_profile=linspace(-3*a,3*a,1000);
x_profile=linspace(-3*a,3*a,6000);
x_M1/a=0.25
x_M2/a=-0.75
```

切割格點數	100	1000	6000	solutions
x_L1/a	-0.3333	-0.3634	-0.3606	n/a
x_L2/a	-1.2424	-1.2643	-1.2657	n/a
x_L3/a	+1.1212	-1.1021	+1.1027	n/a
(x_L1/a)-(x_M2/a)	0.4167	0.3866	0.3894	0.3893
(x_M2/a)-(x_L2/a)	0.4924	0.5143	0.5157	0.5159
(x_M1/a)+1-(x_L3/a)	0.1288	0.1479	0.1463	0.1468

本章節介紹太空與天文觀測上常常用到的 Lagrange points 以及天體分佈中常常提到的 Trojan points 附近的小行星或衛星

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point
https://en.wikipedia.org/wiki/Trojan_(celestial_body)



圖一、太空與天文觀測上常常用到的 Lagrange points 以及天體分佈中常常提到的 Trojan points 分佈情形，其中黃色圓點與藍色圓點代表一個雙星系統中的兩個主要星體。本圖摘自
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Lagrange_very_massive.svg

＊＊結果發現維基百科上這張圖有誤，L3 應該位在大圓圈內！如下圖，才正確。