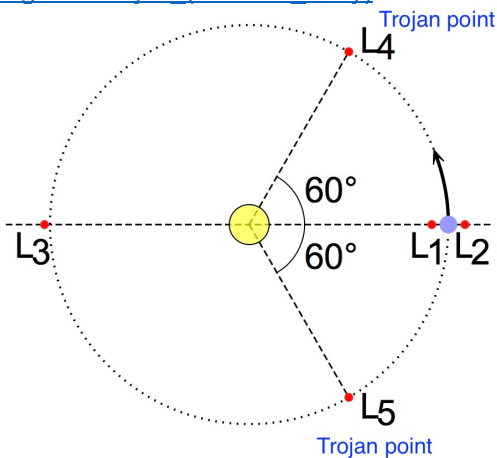


力學課本 7-6 節：

本章節介紹太空與天文觀測上常常用到的 Lagrange points 以及天體分佈中常常提到的 Trojan points 附近的小行星或衛星

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point

[https://en.wikipedia.org/wiki/Trojan_\(celestial_body\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Trojan_(celestial_body))



圖一、太空與天文觀測上常常用到的 Lagrange points 以及天體分佈中常常提到的 Trojan points 分佈情形，其中黃色圓點與藍色圓點代表一個雙星系統中的兩個主要星體。本圖摘自 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b8/Lagrange_very_massive.svg

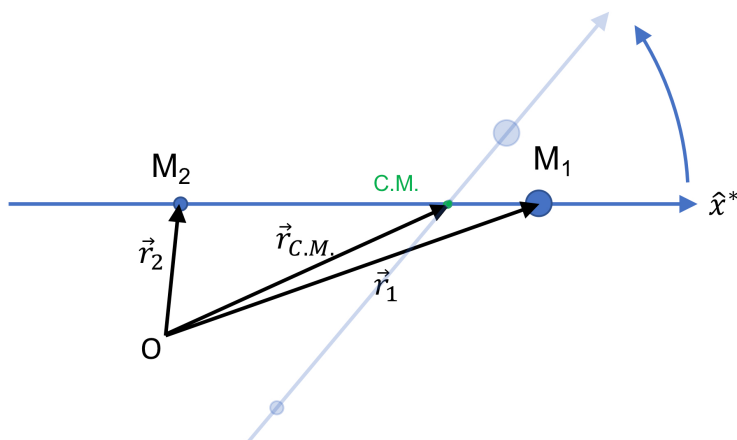
★ ★ 結果發現維基百科上這張圖有誤，L3 應該位在大圓圈內！

圖一中，兩顆大質量星體（黃色圓點與藍色圓點）繞著他們的質心旋轉。在他們的旋轉平面上，有五個 Lagrange points：L1~L5。位在此五點上的其他小質量星體受到兩個主星的萬有引力作用後，可以隨著這兩個星體同步旋轉。因此在雙星的旋轉系統中觀測位在 L1~L5 的小星體，感覺他們好像固定不動似的。圖中 L1~L3 與兩個主星體位在一直線上。且距離次大主星（藍色圓點）的距離由近而遠。L4, L5 兩點與兩主星位置呈現正三角形。L4 位在次大主星（藍色圓點）軌道前進的方向，L5 位在次大主星（藍色圓點）軌道前進的反向。Trojan points 就是 Lagrange points 中的 L4, L5 兩點。¹

¹ 根據以下 Solar System 的投影片，第 56 頁的說明

http://www.ss.ncu.edu.tw/~lyu/lecture_files_en/Lyu_PublicOutreach/SolarSystem.pdf

Saturn has 3 Trojan moons. Jupiter has numerous Trojan asteroids. Mars has 3 Trojan asteroids. Neptune has 8 Trojan asteroids. Earth has one Trojan asteroid at L4.



圖二、雙星系的分佈與運動圖，其中 $M_1 > M_2$ ，C.M. 為質心位置，O 點為一個慣性系中的觀測者。

我們將先找出雙星系的旋轉角速度 ω ，再進一步分析在慣性系統中 (inertial frame) 與旋轉系統中所見到的質點軌跡、質點動能、與質點受力情形。根據「課本」內容，我們重新繪製雙星系的分佈圖形，如圖二所示。(說明，由圖二開始，x 軸的方向都為：由質量中心指向大質量星球，這與圖一中 x 軸的方向為由質量中心指向小質量星球的座標系方向不同。圖一的畫法，是目前通用的畫法。課本中圖 7-7 & 7-8 的畫法都跟本講義主要內容一致。)

若雙星質量滿足 $M_1 > M_2$ 分別位在 \vec{r}_1 and \vec{r}_2 且相距 a ，i.e.,

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = a\hat{x}^* \quad (1)$$

其中 \hat{x}^* 為雙星旋轉系的一個座標軸。在慣性系中看它是隨著時間改變方向。但是在雙星系中看它，卻不隨時間改變。

Let the center of mass of the two-body system is located at $\vec{r}_{C.M.}$.

By definition

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2} \quad (2)$$

若將參考點移到 $\vec{r}_{C.M.}$ ，則方程式(1)&(2)可分別改寫為

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.}) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.}) = a\hat{x}^* \quad (3)$$

$$0 = \vec{r}_{C.M.} - \vec{r}_{C.M.} = \frac{M_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.}) + M_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.})}{M_1 + M_2} \quad (4)$$

為了方便起見，我們可以定義 M_1 & M_2 相對質心的位置向量分別為

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_{C.M.} = x_1\hat{x}^* \quad (5)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_{C.M.} = x_2\hat{x}^* \quad (6)$$

因此方程式 (3) & (4) 可以改寫為

$$x_1 - x_2 = a \quad (7)$$

$$M_1x_1 + M_2x_2 = 0 \quad (8)$$

代數求解方程式(7) & (8) 可得

$$x_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} a \quad (9)$$

$$x_2 = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} a \quad (10)$$

假設我們考慮的時間尺度遠短於此雙星系統質心位置移動的時間尺度（也就是假設在此時間尺度下，質心速度 $\dot{r}_{C.M.}$ 與加速度 $\ddot{r}_{C.M.}$ 都為零）。根據牛頓萬有引力定律， M_1 受到 M_2 的吸引力，反之亦然，因此

$$M_1 \frac{d^2}{dt^2} (x_1 \hat{x}^*) = \frac{GM_1 M_2}{a^2} (-\hat{x}^*) \quad (11)$$

$$M_2 \frac{d^2}{dt^2} (x_2 \hat{x}^*) = \frac{GM_1 M_2}{a^2} (+\hat{x}^*) \quad (12)$$

由 [(11) / M_1] - [(12) / M_2] 可得

$$\frac{d^2}{dt^2} (a \hat{x}^*) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{a^2} \hat{x}^* \quad (13)$$

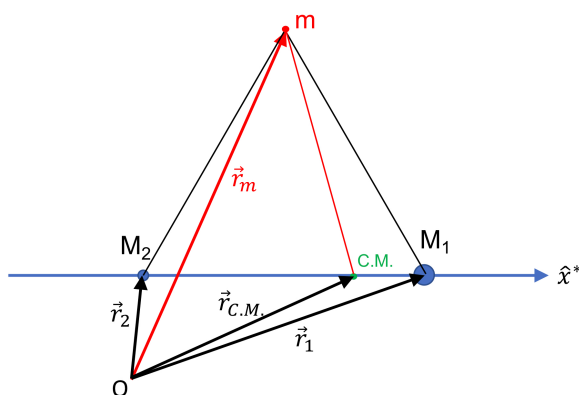
或

$$\frac{d^2}{dt^2} (\hat{x}^*) = -\omega^2 (\hat{x}^*) \quad (14)$$

where

$$\omega^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \quad (15)$$

也就是說 一個雙星系，雙星質量分別為 M_1 與 M_2 ，雙星相距 a ，將以 $\omega = \sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$ 的角速度繞著 質心 打轉。



圖三、以一個位在 L5 處，質量為 m ，的小質量天體為例，說明小質量天體在此雙星系中 ($m \ll M_2 < M_1$) 的受力與運動情形，其中 C.M. 為質心位置，O 點為一個慣性系中的觀測者。

現在考慮一個質量為 m 的小質量天體 ($m \ll M_2 < M_1$) 在此雙星系中運動。如圖三所示。它的位置向量為 \vec{r}_m 。令質量為 m 的小質量天體相對 M_1 與 M_2 的質心 $\vec{r}_{C.M.}$ 的位置向量为

$$\vec{r}_m - \vec{r}_{C.M.} = x\hat{x}^* + y\hat{y}^* \quad (16)$$

若質心速度與加速度都為零 ($\dot{\vec{r}}_{C.M.} = \ddot{\vec{r}}_{C.M.} = 0$)，則一個慣性系的觀測者 O 看到質量為 m 的小天體的速度為

$$\frac{d}{dt}(x\hat{x}^* + y\hat{y}^*) = \vec{v} \quad (17)$$

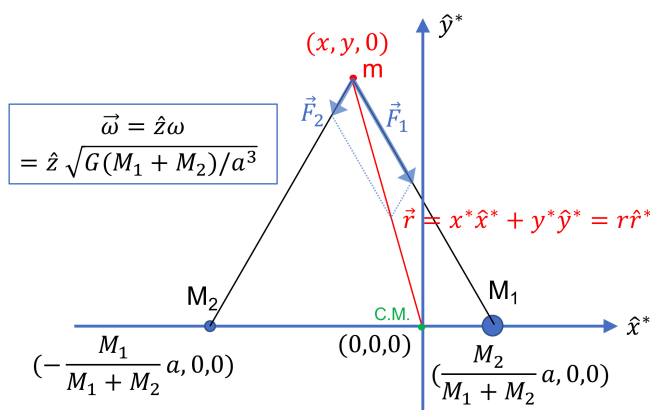
一個慣性系的觀測者 O 看到質量為 m 的小天體受到 M_1 與 M_2 的吸引而運動，其運動方程式為

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x\hat{x}^* + y\hat{y}^*) = -\frac{GM_1m}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_1|^3}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_1) - \frac{GM_2m}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_2|^3}(\vec{\xi} - \vec{\xi}_2) \quad (18)$$

圖四是以一個位在 L5 處，質量為 m ，的小質量天體為例，說明小質量天體在此雙星的旋轉系統中 ($m \ll M_2 < M_1$) 的受力與運動情形，其中 C.M. 為雙星的質心位置。我們取此質心為旋轉系的原點。旋轉系的旋轉角速度為 $\vec{\omega} = \hat{z}\omega = \hat{z}\sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$ 。在此旋轉系統中，質量為 m 的小天體的運動方程式為

$$m \frac{d^* \vec{v}^*}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (22)$$

其中 \vec{F}_1 與 \vec{F}_2 分別為質量為 m 的小天體受到 M_1 與 M_2 的萬有引力， d^*/dt 表示在旋轉座標系中的時間微分，也就是只對「測得到的分量」微分，不考慮座標軸在慣性系中會隨著時間改變方向。



圖四、以位在 L5 處，質量為 m ，的小質量天體為例，說明小質量天體在此雙星的旋轉系統中 ($m \ll M_2 < M_1$) 的受力與運動情形，其中 C.M. 為雙星的質心位置。我們取此質心為旋轉系的原

點。小質量天體，與雙星的位置座標如圖所示。旋轉系的旋轉角速度為 $\vec{\omega} = \hat{z}\omega = \hat{z}\sqrt{G(M_1 + M_2)/a^3}$ 。

根據課本 7-2 & 7-3 的推導可得

$$\begin{aligned}\frac{d^*\vec{r}}{dt} &= \vec{v}^* = \left(\frac{dx^*}{dt} \hat{x}^* + \frac{dy^*}{dt} \hat{y}^* \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \frac{d^*\vec{v}^*}{dt} &= \vec{a}^* = \left(\frac{dv_x^*}{dt} \hat{x}^* + \frac{dv_y^*}{dt} \hat{y}^* \right) = \frac{d\vec{v}^*}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}^*\end{aligned}$$

要推導 L4, L5 的位置座標，計算過程比較複雜。可是我們反過來卻可以很輕易的證明：

位在 L4, L5 處的小星體，在雙星的重力作用下，其合力剛好等於 $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2\vec{r}$ 。因此(22)式等號右邊，第一、第二、第四項的和為零，也就是說，如果位在 L4, L5 處的小星體，在旋轉系中的速度 $\vec{v}^* = 0$ ，則科氏力 $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}^*$ 為零，因此它在旋轉系中的加速度 $\vec{a}^* = d^*\vec{v}^*/dt$ 也會等於零。因此位在 L4, L5 處的小星體可以與雙星同步旋轉。

證明：

圖四中，位在 L5 處的小星體受到的萬有引力分別為

$$\vec{F}_1 = -\frac{GM_1m}{a^3} \left[\hat{x}^* \left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2} a \right) + \hat{y}^* y^* \right] \quad (23)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{GM_2m}{a^3} \left[\hat{x}^* \left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2} a \right) + \hat{y}^* y^* \right] \quad (24)$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= -\frac{Gm}{a^3} (M_1 + M_2) (\hat{x}^* x^* + \hat{y}^* y^*) + \frac{Gm (M_1 M_2 - M_1 M_2) a}{a^3 (M_1 + M_2)} \\ &= -\frac{Gm}{a^3} (M_1 + M_2) (\hat{x}^* x^* + \hat{y}^* y^*)\end{aligned} \quad (25)$$

因為(12)式得 $\omega^2 = G(M_1 + M_2)/a^3$ ，而小天體與質心距離 $\vec{r} = \hat{x}^* x^* + \hat{y}^* y^*$ ，因此(25)式可改寫為

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{Gm}{a^3} (M_1 + M_2) (\hat{x}^* x^* + \hat{y}^* y^*) = -m\omega^2\vec{r} \quad (26)$$

因此(22)式等號右邊，第一、第二、第四項的和為

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2\vec{r} - m\omega\hat{z} \times (\omega\hat{z} \times \vec{r}) = -m\omega^2\vec{r} + m\omega^2\vec{r} = 0$$

因此(22)式只剩下

$$m \frac{d^*\vec{v}^*}{dt} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* \quad (27)$$

因此如果位在 L4, L5 處的小星體，在旋轉系中的速度 $\vec{v}^* = 0$ ，則(27)式等號右邊科氏力 $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}^*$ 為零，因此它在旋轉系中的加速度 $\vec{a}^* = d^*\vec{v}^*/dt$ 也會等於零。因此位在 L4, L5 處的小星體可以與雙星同步旋轉。

同理，我們可以很容易的找到 L1, L2, L3 在此旋轉座標系中的位置。

Exercise 7.2 請找出 L1, L2, L3 在圖四旋轉座標系中的位置。

若想估算位在其它個位置的小星體的運動軌跡，就比較難一些，但是也可以計算。首先(23)式與(24)式，要改寫為

\vec{F}_1 與 \vec{F}_2 分別為受到 M_1 與 M_2 的萬有引力，也就是

$$\vec{F}_1 = -\frac{GM_1m}{\left[\left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\hat{x}^*\left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2}a\right) + \hat{y}^*y^*\right] \quad (28)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{GM_2m}{\left[\left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}\right]^{\frac{3}{2}}}\left[\hat{x}^*\left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2}a\right) + \hat{y}^*y^*\right] \quad (29)$$

\vec{F}_1 與 \vec{F}_2 也可改寫成

$$\vec{F}_1 = -\nabla^* \frac{-GM_1m}{\sqrt{\left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}}} \quad (30)$$

$$\vec{F}_2 = -\nabla^* \frac{-GM_2m}{\sqrt{\left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}}} \quad (31)$$

其中 $\nabla^* = \hat{x}^*(\partial/\partial x^*) + \hat{y}^*(\partial/\partial y^*)$ 。而(22)式中最後一項離心力也可以改寫為

$$\begin{aligned} -m\omega\hat{z} \times (\omega\hat{z} \times \vec{r}) &= +m\omega^2\vec{r} = \nabla^* \left(\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right) \\ &= -\nabla^* \left[-\frac{1}{2}m\omega^2(x^{*2} + y^{*2})\right] \\ &= -\nabla^* \left[-\frac{1}{2}m\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}(x^{*2} + y^{*2})\right] \end{aligned} \quad (32)$$

因此(22)式可改寫為

$$m\frac{d^*\vec{v}^*}{dt} = -\nabla^*V' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* \quad (33)$$

其中 等效位能 'V'可由(30)~(32)式得

$$\begin{aligned} 'V'[x(t), y(t)] &= -\frac{GM_1m}{\sqrt{\left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}}} \\ &\quad -\frac{GM_2m}{\sqrt{\left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2}a\right)^2 + y^{*2}}} \\ &\quad -\frac{1}{2}m\frac{G(M_1 + M_2)}{a^3}(x^{*2} + y^{*2}) \end{aligned} \quad (34)$$

由(34)式可得此等效位能' V' ' $[x^*(t), y^*(t)]$ 隨時間的變化是

$$\frac{d}{dt}('V'[x^*(t), y^*(t)]) = \frac{\partial('V')}{\partial x^*} \frac{dx^*(t)}{dt} + \frac{\partial('V')}{\partial y^*} \frac{dy^*(t)}{dt} = \vec{v}^* \cdot \nabla^* V' \quad (35)$$

而小星體在旋轉系中的動能為

$$T^* = \frac{1}{2} m \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \quad (36)$$

此動能隨時間的變化為

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^* \cdot \vec{v}^* \right) = \vec{v}^* \cdot \frac{d}{dt} (m \vec{v}^*) \quad (37)$$

因此若將(33)式與 \vec{v}^* 做內積，再利用(37)式與(35)式的結果可得

$$\vec{v}^* \cdot m \frac{d^* \vec{v}^*}{dt} = \frac{dT^*}{dt} = -\vec{v}^* \cdot \nabla^* V' - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}^*) \cdot \vec{v}^* = -\frac{d}{dt} ('V') \quad (38)$$

其中 $(\vec{\omega} \times \vec{v}^*) \cdot \vec{v}^* = 0$ ，因此(38)式可改寫為

$$\frac{d(T^* + 'V')}{dt} = 0 \quad (39)$$

也就是說，在此旋轉系中， M_1 與 M_2 所產生的「重力位」不是時間的函數，因此一個小質點在此重力場環境中的運動，其重力位能與動能的和也不會隨時間而改變。

將(28)式、(29)式、以及(32)式中第一個等號後的結果，代入(22)式可得

$$\begin{aligned} m \frac{d^* \vec{v}^*}{dt} = & -\frac{GM_1 m}{\left[\left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2} a \right)^2 + y^{*2} \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\hat{x}^* \left(x^* - \frac{M_2}{M_1 + M_2} a \right) + \hat{y}^* y^* \right] \\ & -\frac{GM_2 m}{\left[\left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2} a \right)^2 + y^{*2} \right]^{\frac{3}{2}}} \left[\hat{x}^* \left(x^* + \frac{M_1}{M_1 + M_2} a \right) + \hat{y}^* y^* \right] \\ & - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* + m \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} (\hat{x}^* x^* + \hat{y}^* y^*) \end{aligned} \quad (40)$$

因此只要給一組初始條件 $\{ x^*(t=0), y^*(t=0), v_x^*(t=0), v_y^*(t=0) \}$ ，我們可以直接用數值方法求解(40)式。但是每次只能解出一個質點的軌跡。可是我們如果能直接繪出(34)式中等效位能' V' '在 x^*-y^* 平面上的等值線分佈圖型，則由(33)式可知，在此平面上運動的小星體的軌跡線就可能很接近此平面上等效位能' V' '的等值線。也就是說，如果 $-\nabla^* V' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^* \approx 0$ 則 $m\vec{a}^* \rightarrow 0$ 。這項預測結果可以解釋為何木星的Trojan小行星群的分佈情形，大致沿著L4, L5兩點附近的等效位能' V' '的等值線。而L1, L2, L3, L4, L5這幾個點，恰巧就是 $\nabla^* V' = 0$ 的位置，其中L1, L2, L3都是鞍點(saddle points)，L4, L5都是local-maximum points。

Exercise 7.3 若一個雙星系統， $M_1:M_2 = 3:1$ ，兩星相距 a 。請根據 (34) 式繪出等效位能 ' V ' 的等值線。

令 $x^* = \xi a$ 以及 $y^* = \eta a$ ，則 (34) 式可改寫為

$$\begin{aligned}
 'V' &= -\frac{GM_1m}{a} \frac{1}{\sqrt{\left(\xi - \frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2 + \eta^2}} - \frac{GM_2m}{a} \frac{1}{\sqrt{\left(\xi + \frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2 + \eta^2}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{Gm(M_1+M_2)}{a} (\xi^2 + \eta^2) \\
 &= \frac{Gm(M_1+M_2)}{a} \left[-\frac{\frac{M_1}{M_1+M_2}}{\sqrt{\left(\xi - \frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2 + \eta^2}} - \frac{\frac{M_2}{M_1+M_2}}{\sqrt{\left(\xi + \frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2 + \eta^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right]
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{Gm(M_1+M_2)}{a} \\
 \xi_{M_1} &= \frac{M_2}{M_1+M_2}
 \end{aligned}$$

則

$$\frac{M_1}{M_1+M_2} = -\xi_{M_2} = 1 - \xi_{M_1}$$

因此 ' V ' 可進一步改寫為

$$'V' = V_0 \left[-\frac{1 - \xi_{M_1}}{\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}} - \frac{\xi_{M_1}}{\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}} - \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \right] \quad (41)$$

利用(41)式，考慮 Exercise 7.3 的解 可得 $\xi_{M_1} = 0.25$ 繪出方括弧裡面的函數值在 ξ - η 平面上的等值線 即為所求。

由於位在 Lagrange points 處的小質點可以維持與雙星保持固定的相對位置，一起繞著質心打轉。因此 $\vec{v}^* = 0$ 且 $d^*\vec{v}^*/dt = 0$ 。由(33)式

$$m \frac{d^*\vec{v}^*}{dt} = -\nabla^* 'V' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}^*$$

可知，Lagrange points 一定是位在 $\nabla^* 'V' = 0$ 處。

因為

$$\nabla^* 'V' = \left(\hat{x}^* \frac{\partial}{\partial x^*} + \hat{y}^* \frac{\partial}{\partial y^*} \right) 'V'(x^*, y^*) = \frac{1}{a} \left(\hat{x}^* \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{y}^* \frac{\partial}{\partial \eta} \right) 'V'(\xi, \eta)$$

則 $\nabla^* 'V' = 0$ 表示

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} 'V'(\xi, \eta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} 'V'(\xi, \eta) &= 0 \end{aligned}$$

由 (41) 式可知，

$$\frac{\partial 'V'}{\partial \xi} = V_0 \left[\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi + 1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} - \xi \right] \quad (42)$$

$$\frac{\partial 'V'}{\partial \eta} = V_0 \left[\frac{(1 - \xi_{M_1})\eta}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} + \frac{\xi_{M_1}\eta}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} - \eta \right] \quad (43)$$

其中(43)式可改寫為

$$\frac{\partial 'V'}{\partial \eta} = V_0 \eta \left[\frac{(1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} + \frac{\xi_{M_1}}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} - 1 \right] \quad (44)$$

由(44)式可知 $\partial 'V' / \partial \eta = 0$ 的解有兩組

$$\eta = 0 \quad (45)$$

或 $\eta \neq 0$ 但是

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} + \frac{\xi_{M_1}}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2} \right)^3} - 1 = 0 \quad (46)$$

若考慮 $\eta = 0$ 這組解，則 $\partial 'V' / \partial \xi = 0$ 的解就可寫成

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2} \right)^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi + 1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2} \right)^3} - \xi = 0 \quad (47)$$

這個式子的解就是 L1, L2, L3 的三個點的 x^*/a 的解。令這三個解分別為 $\xi_1, \xi_2,$ and ξ_3 。則依定義與圖四可知

$$\begin{aligned} \xi_{M_2} &< \xi_1 < \xi_{M_1} \\ \xi_2 &< \xi_{M_2} < \xi_{M_1} \\ \xi_{M_2} &< \xi_{M_1} < \xi_3 \end{aligned}$$

因此 (47) 式可改寫為

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi_1 - \xi_{M_1})}{-(\xi_1 - \xi_{M_1})^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi_1 + 1 - \xi_{M_1})}{(\xi_1 + 1 - \xi_{M_1})^3} - \xi_1 = 0 \quad (47.1)$$

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi_2 - \xi_{M_1})}{-(\xi_2 - \xi_{M_1})^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi_2 + 1 - \xi_{M_1})}{-(\xi_2 + 1 - \xi_{M_1})^3} - \xi_2 = 0 \quad (47.2)$$

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi_3 - \xi_{M_1})}{(\xi_3 - \xi_{M_1})^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi_3 + 1 - \xi_{M_1})}{(\xi_3 + 1 - \xi_{M_1})^3} - \xi_3 = 0 \quad (47.3)$$

約分後得

$$-\frac{(1 - \xi_{M_1})}{(\xi_1 - \xi_{M_1})^2} + \frac{\xi_{M_1}}{(\xi_1 + 1 - \xi_{M_1})^2} - \xi_1 = 0 \quad (48.1)$$

$$-\frac{(1 - \xi_{M_1})}{(\xi_2 - \xi_{M_1})^2} - \frac{\xi_{M_1}}{(\xi_2 + 1 - \xi_{M_1})^2} - \xi_2 = 0 \quad (48.2)$$

$$+\frac{(1 - \xi_{M_1})}{(\xi_3 - \xi_{M_1})^2} + \frac{\xi_{M_1}}{(\xi_3 + 1 - \xi_{M_1})^2} - \xi_3 = 0 \quad (48.3)$$

令

$$f_1(\xi) = \frac{(1 - \xi_{M_1})}{(\xi - \xi_{M_1})^2}$$

$$f_2(\xi) = \frac{\xi_{M_1}}{[\xi - (\xi_{M_1} - 1)]^2}$$

$$g(\xi) = \xi$$

則 (48.1), (48.2), (48.3) 可改寫為

$$[-f_1(\xi) + f_2(\xi) = g(\xi)]_{\xi=\xi_1} \quad (49.1)$$

$$[-f_1(\xi) - f_2(\xi) = g(\xi)]_{\xi=\xi_2} \quad (49.2)$$

$$[+f_1(\xi) + f_2(\xi) = g(\xi)]_{\xi=\xi_3} \quad (49.3)$$

我們可以利用做圖法求解。以下是最常用的一種作圖法求解方式。

圖五中，我們取 $\xi_{M_1} = 0.25$ ，繪出(a) (49.1) 式, (b) (49.2) 式, (c) (49.3) 式左側函數的曲線（黑色曲線），其中黑色曲線是由平移到 $\xi = 0.25$ 的一個 $\pm 0.75/\xi^2$ 藍色曲線以及一個平移到 $\xi = -0.75$ 的一個 $\pm 0.25/\xi^2$ 綠色曲線疊加而成的。黑色曲線與紅色直線函數 $g(\xi) = \xi$ 的交點就是對應的解(a) $\xi = \xi_1 \approx -0.36 \pm 0.025$ (b) $\xi = \xi_2 \approx -1.26 \pm 0.025$ (c) $\xi = \xi_3 \approx 1.09 \pm 0.025$

圖六綜合圖五的結果可以得到(47)式的解。黑色曲線是(47)式第一項（藍色曲線）與第二項（綠色曲線）所對應函數的和。黑色曲線與紅色直線函數 $g(\xi) = \xi$ 的交點就是對應的解。

若考慮 $\eta \neq 0$ 但是滿足(46)式

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{\xi_{M_1}}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} - 1 = 0$$

這組解，則 $\partial'V'/\partial\xi = 0$ 的解就必須寫成

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(\xi - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{\xi_{M_1}(\xi + 1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} - \xi = 0 \quad (50)$$

將(46)式乘以 ξ 可得

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})\xi}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{\xi_{M_1}\xi}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} - \xi = 0 \quad (51)$$

由(50)-(51)可得

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})(-\xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{\xi_{M_1}(1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} = 0$$

或

$$\xi_{M_1}(1 - \xi_{M_1}) \left[\frac{-1}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} \right] = 0 \quad (52)$$

因為 $\xi_{M_1}(1 - \xi_{M_1}) \neq 0$ ，所以

$$\frac{-1}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{1}{\left(\sqrt{(\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} = 0 \quad (53)$$

(53)式的解為

$$(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2 = (\xi + 1 - \xi_{M_1})^2 + \eta^2 = (\xi - \xi_{M_2})^2 + \eta^2 \quad (54)$$

由於 $\eta \neq 0$ 的解，就是 L4 and L5 的位置。(54)式的結果顯示，L4 (或 L5) 與雙星 M_1 及 M_2 等距離，三者呈現一個等腰三角形。再將(54)式的結果，代回(46)式，(46)式改寫為

$$\frac{(1 - \xi_{M_1})}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} + \frac{\xi_{M_1}}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} - 1 = 0$$

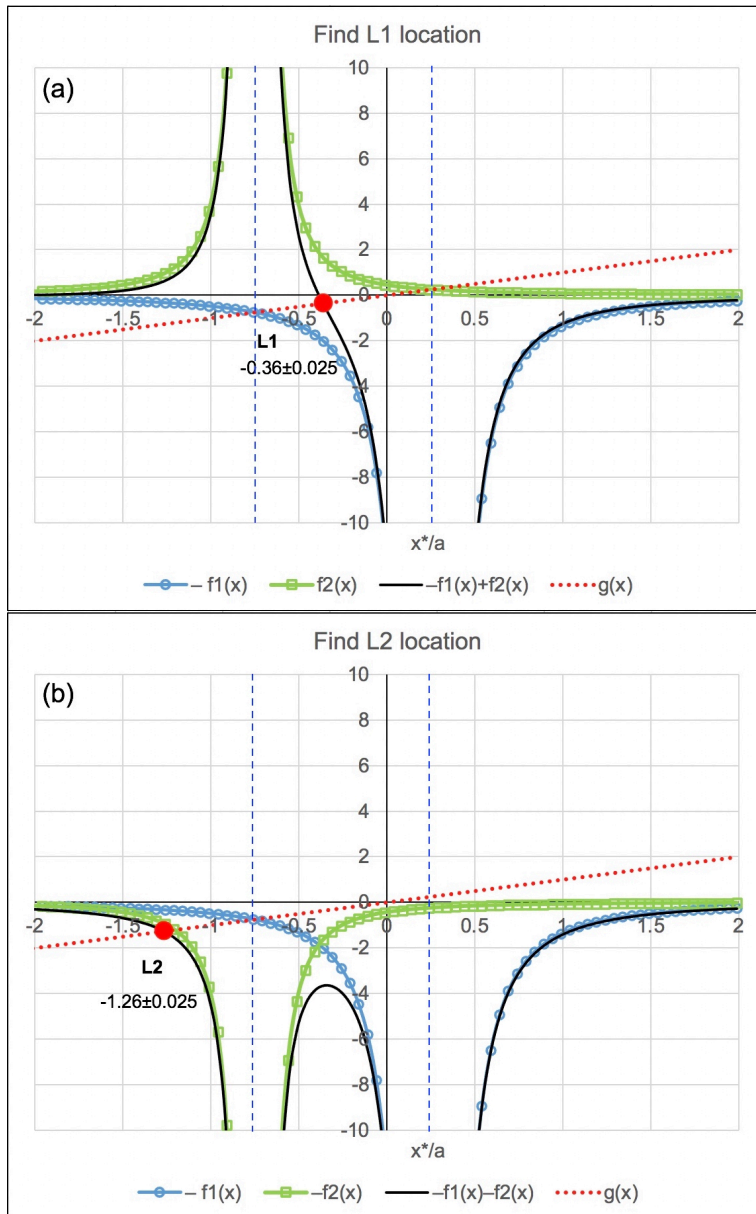
也就是

$$\frac{1}{\left(\sqrt{(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2}\right)^3} = 1$$

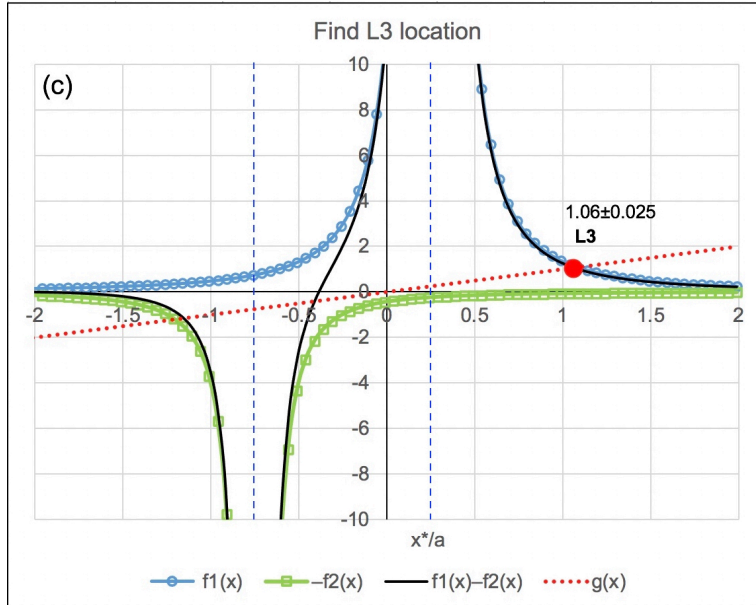
因此可得

$$(\xi - \xi_{M_1})^2 + \eta^2 = 1 \quad (55)$$

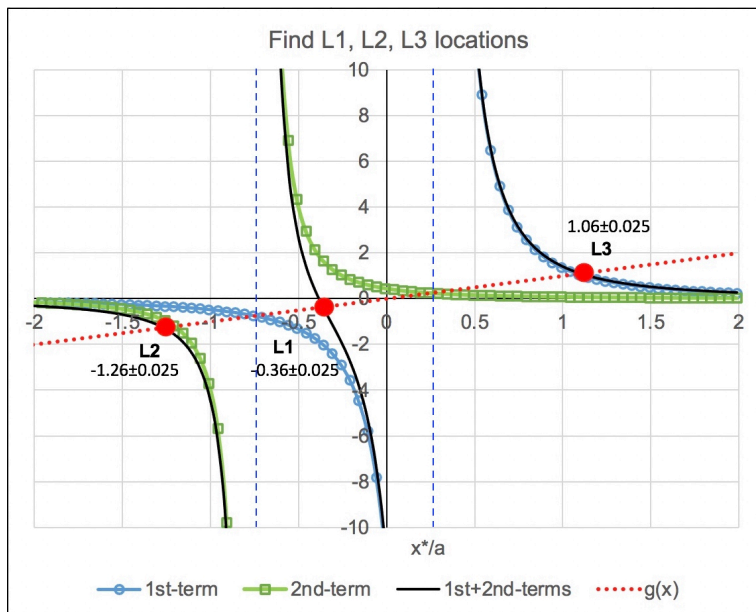
(55)式的結果顯示，L4（或 L5）與 M_1 星體的距離等於 a ，因此綜合(54)式與(55)式的結果，可知 L4（或 L5）與雙星 M_1 及 M_2 等距離，三者呈現一個正三角形的分佈。



圖五、取 $\xi_{M_1} = 0.25$ ，繪出(a) (49.1) 式, (b) (49.2) 式, (c) (49.3) 式左側函數的曲線（黑色曲線），其中黑色曲線是由平移到 $\xi = 0.25$ 的一個 $\pm 0.75/\xi^2$ 藍色曲線以及一個平移到 $\xi = -0.75$ 的一個 $\pm 0.25/\xi^2$ 綠色曲線疊加而成的。黑色曲線與紅色直線函數 $g(\xi) = \xi$ 的交點就是對應的解(a) $\xi = \xi_1 \approx -0.36 \pm 0.025$ (b) $\xi = \xi_2 \approx -1.26 \pm 0.025$ (c) $\xi = \xi_3 \approx 1.09 \pm 0.025$



圖五、(續)



圖六、綜合圖五的結果，可得(47)式的解。黑色曲線是(47)式第一項（藍色曲線）與第二項（綠色曲線）所對應函數的和。黑色曲線與紅色直線函數 $g(\xi) = \xi$ 的交點就是對應的解。