力學課本第 6 章：

在第三章中，我們學到牛頓如何由克卜勒（Kepler）所提的三個行星運動定律，抽絲剝繭，找出了兩質點之間的萬有引力公式。這個萬有引力公式，可以完整得解釋三個克卜勒行星運動定律。在本章中，我們將近一步考慮，如果質量不是集中在一點，而是分佈在一個區域中，我們該如何估算這個質量分佈所產生的重力場呢？

在 Table 1 中，我們可以根據電磁學中靜電場所滿足的方程式，用比對的方式，可以找出重力場 $\vec{g}$會滿足以下的 Gauss Law 微分方程式。

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \qquad (1)$$

又因為靜電場與重力場的旋度都為零（Curl-free fields），所以兩者都可以找到對應的靜電位Φ與重力位Φ_g。因此，靜電場與重力場滿足的 Gauss Law，就可以改寫為靜電位ϕ與重力位ϕ_g滿足的 Poisson equation。也就是

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho_c(\vec{r})}{\epsilon_0} = -4\pi k\rho_c(\vec{r}) \qquad (2)$$

$$\nabla^2\Phi_g = 4\pi G\rho(\vec{r}) \qquad (3)$$

Table 1. Electrostatic electric field v.s. gravitational field

	靜電場	**重力場**
Curl-free field	$\nabla \times \vec{E}^{E.S.} = 0$	$\nabla \times \vec{g} = 0$
Force between point sources	$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$
Field between point sources	$\vec{E}^{E.S.} = \frac{kq_1}{r^2}\hat{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$
Curl-free field	$\nabla \times \vec{E}^{E.S.} = 0$	$\nabla \times \vec{g} = 0$
$\boldsymbol{\nabla \times (\nabla f) = 0}$	$\vec{E}^{E.S.} = -\nabla\Phi$	$\vec{g} = -\nabla\Phi_g$
Gauss Law	$\nabla \cdot \vec{E}^{E.S.} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} = 4\pi k\rho_c$	$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho$
Poisson Equation	$-\nabla^2\Phi = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} = 4\pi k\rho_c$	$-\nabla^2\Phi_g = -4\pi G\rho$

附錄 A 介紹 Poisson equation 所對應的 Green's function 解。根據附錄 A 的結果，我們可以利用 Poisson equation 所對應的 Green's function ，寫出重力場在一個質量分佈附近的通式解。

附錄 A 證明滿足以下 Poisson equation

$$\nabla^2 G_{Poisson} = \delta(\vec{r}) \tag{4}$$

的格林函數(Green's function) $G_{Poisson}$的解為

$$G_{Poisson}(r) = -\frac{1}{4\pi r} \tag{5}$$

由於 delta function 是一個不改變原函數形式的權重函數 (weighting function)，因此任何一個函數 $f(r)$ 均可表示為

$$f(r) = \int_0^\infty f(r')\delta(r - r')dr' \tag{6}$$

同理，三維的 delta function 與 任何一函數 $f(\vec{r})$ 具有以下的關係式

$$f(\vec{r}) = \iiint f(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')dV' \tag{7}$$

因此任意 Poisson equation

$$\nabla^2 \Phi = f(\vec{r}) \tag{8}$$

的解就是

$$\Phi(\vec{r}) = \iiint f(\vec{r}')G_{Poisson}(|\vec{r} - \vec{r}'|)dV' = \iiint (-\frac{f(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|})dV' \tag{9}$$

將方程式(8)&(9)的結果代回方程式(3)，可知，方程式(3)的重力位的解為

$$\Phi_g = 4\pi G \iiint \frac{-\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}dV' = -\iiint \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV' \tag{10}$$

此重力位所對應的重力場解為

$$\vec{g} = -\nabla\Phi_g = \nabla \iiint \frac{G\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}dV' \tag{11}$$

所以當我們知道質量密度分佈時，一定要先求出重力位，才能求出重力場。同理，當我們知道電荷密度分佈時，一定要先求出電位(Scalar potential)，才能求出靜電場。當我們知道電流密度分佈時，一定要先求出 Vector Potential ，才能求出靜磁場。

附錄 A Green's function for the Poisson equation

當的 Poisson equation 的「源」是一個 point source 它的解就是 "Green's function for the Poisson equation." [1]

Let us consider a three-dimensional Poisson equation with a point source in the three-dimensional space, it yields

$$\nabla^2 G_{Poisson} = \delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad \text{(A.1)}$$

where 3-D and 1-D delta functions satisfy respectively the following relations

$$\iiint \delta(\vec{r}) dV = \iiint \delta(\vec{r})\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi = 1 \quad \text{(A.2)}$$

and

$$\int_0^\infty \delta(r) dr = 1 \quad \text{(A.3)}$$

由於 point source 所對應的解，會具有球面對稱的特性，方程式(A.1)中的 Green's function $G_{Poisson}$ 應該只是 r 的函數，因此方程式(A.1)可改寫為

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{d}{dr}G_{Poisson}\right)\right] = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad \text{(A.4)}$$

方程式(A.4)等號的左右兩邊同乘以 r^2 可得

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{d}{dr}G_{Poisson}\right)\right] = \frac{\delta(r)}{4\pi} \quad \text{(A.5)}$$

方程式(A.5)等號的左右兩邊對 r 積分一次，可得

$$r^2\left(\frac{d}{dr}G_{Poisson}\right) = \frac{1}{4\pi} \quad \text{(A.6)}$$

方程式(A.6)等號的左右兩邊同除以 r^2 可得

$$\frac{d}{dr}G_{Poisson} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad \text{(A.7)}$$

方程式(A.7)等號的左右兩邊對 r 積分一次，可得 Poisson equation 的格林函數

$$G_{Poisson}(r) = -\frac{1}{4\pi r} \quad \text{(A.8)}$$

[1] 事實上，不同的「線性」微分方程式，就有不同的格林函數解，也就是說格林函數是隨著它所對應的線性微分方程式不同，而有不同的形式，其中 Poisson equation 的格林函數，是最有名也最常用的一組格林函數

Exercise 6.1 Show that in the three-dimensional space the delta function satisfies

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

Exercise 1.8 的最後解答如下，你會證明嗎？

Exercise 6.2 Let us define the gradient of a scalar function f to be

$$\nabla f = \frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}$$

Show that

$$\hat{e}_1 = \frac{\nabla u_1}{|\nabla u_1|} = h_1 \nabla u_1$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\nabla u_2}{|\nabla u_2|} = h_2 \nabla u_2$$

$$\hat{e}_3 = \frac{\nabla u_3}{|\nabla u_3|} = h_3 \nabla u_3$$

Exercise 6.3 Let $\vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3$

Show that

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

提示：可以利用向量分析恆等式 $\nabla \times (\nabla f) = 0$來證明

Exercise 6.4 Let $\vec{A} = \hat{e}_1 A_1 + \hat{e}_2 A_2 + \hat{e}_3 A_3$

Show that

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1) + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_2) + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_3)\right]$$

提示：可以利用向量分析恆等式 $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$來證明

Exercise 6.5 Show that

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

提示：$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$