

3.1. 前言：牛頓的萬有引力模型為「地心說」提供了一套完整的物理機制

還記得老師讀高中時，生物課本用科學家研究瘧疾的發生原因為範例，教學生，什麼是：大膽假設、小心求證！一開始，有人認為在瘴癘之鄉，罹患瘧疾，是因為喝了髒水。於是有人去飲用那些水，結果只會拉肚子，不會打擺子。最後科學家終於了解，是那些在水中孵化的瘧蚊，在叮咬人時，將病人血液中的瘧原蟲，傳播給健康的人。所以當時的高中生物，不只教學生「生物」這個主題、更教學生「做研究」的態度與方法。

在大學的理工地科學院裡，第一個讓學生體會科學家如何做研究、如何剖析物理問題的，應該就屬這章所介紹的內容。

話說，尼古拉·哥白尼 (Nicolaus Copernicus, 1473~1543) 他看了很多希臘古籍與早年的觀測，因此倡導地球與其他行星是繞著太陽打轉。他的理論與當時主流的看法（托勒密學派的地心說）不同。為了避免爭議，直到他將過世時，才將他的想法寫成專書出版，希望讓更多後人有機會認識他的理論。

哥白尼的後繼者 第谷·布拉赫 (Tycho Brahe, 1546~1601) 並不同意哥白尼的想法，反而提出一個修正型的地心說：認為行星繞著太陽轉，太陽再照著地球轉。第谷·布拉赫先後受到丹麥國王腓特烈二世與聖羅馬帝國皇帝魯道夫二世以及其他貴族的資助，有資金可以蓋天文台，讓上百名學生與研究人員在他的天文台進行觀測¹。他又有機會目睹 1577 年大彗星，並做了非常詳盡的觀測。

刻卜勒 (Johannes Kepler, 1571~1630) 曾經是第谷·布拉赫 的助手，後來也是 第谷·布拉赫 職位的繼任者。刻卜勒是哥白尼學說的擁護者。他雖然視力差，無法做觀測，但是他的數學好，他根據 第谷·布拉赫 對行星與彗星的觀測結果，做了一番分析，總結出有名的刻卜勒行星運動三定律：

- I. 行星的軌道是一個以恆星為一個焦點的橢圓。
- II. 單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 相等。
- III. 行星「公轉週期」的平方與行星「橢圓軌道半長軸長」的三次方成正比。

¹ <https://zh.wikipedia.org/zh-hk/第谷·布拉赫>

為什麼刻卜勒之前以及與他同期的科學家（例如：卡西尼²），不願認同哥白尼的想法呢？原來，他們是用一個錯誤的認知，來推翻哥白尼的說法。包括刻卜勒在內，他們以為太陽是用一種類似磁場的吸力，拉著地球與其他行星，繞著太陽打轉。因為磁鐵的吸引力，是當時人們日常生活中，唯一、已知的，遠距離吸引力的範例。可是日常生活中，人們也知道，如果拉著水桶打轉，水桶裡的水會向外潑灑出去。因此這些科學家，就是根據這個理由，覺得哥白尼的學說，太可笑了！（如果地球繞著太陽打轉，地球上的人應該會被甩入太空中！）刻卜勒的後繼者牛頓，就針對這個問題，提供了一個漂亮的答案：「萬有引力定律」。艾薩克·牛頓爵士（Sir Isaac Newton，1643~1727）在大學時期（劍橋大學的三一學院），就已經研讀了哥白尼的學說與刻卜勒行星運動三定律。他於 1665 年獲得大學學位後，因為倫敦大瘟疫（鼠疫，黑死病，1665 年至 1666 年）避走鄉下，潛心研究微積分、光學、並建構出「萬有引力定律」來逐一解釋刻卜勒行星運動三定律。疫情結束後，他回到劍橋大學三一學院就讀研究所，並在二十年後，1687 年才正式發表了萬有引力學說。更晚，1699 年以後，才正式發表他的微積分理論。³

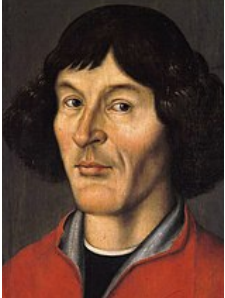
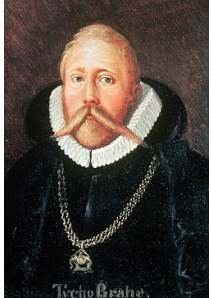

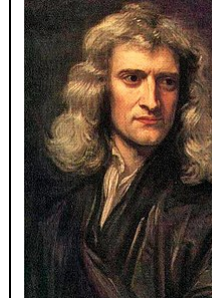
牛頓和 第谷·布拉赫 一樣，在有生之年，都有機會目睹一顆大彗星。牛頓看到的是一顆掠日彗星（Sungrazing comet）：1680 年大彗星。因為牛頓用它來驗證自己的萬有引力定律，所以也被稱之為 Newton's comet。由此可知，古時候的科學家，要發表一個理論，要等很多年，等到一個機會，能驗證自己的理論確實值得考驗，才會發表。這與今日的科學家，受到成果發表的壓力，被迫急著發表一些不成熟的研究成果，完全不同！牛頓說他的萬有引力定律，是站在巨人肩膀上完成的。表一列出成就此萬有引力定律的巨人畫像。

² https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Domenico_Cassini

卡西尼（Giovanni Domenico Cassini, 1625~1712）義大利天文學家，發現木星大紅斑與土星環的縫隙。也發現木星的差動自轉，也是土星的好幾顆衛星（土衛 3,4,5,8）的發現者。葉永烜教授等人催生的卡西尼號土星探測器，就是用他的名字命名的。
(<https://www.latimes.com/science/la-sci-cassini-oral-history-20170912-htmlstory.html>)

³ 牛頓在提出萬有引力定律以前的那 20 年間，靠著他研發的牛頓折射式望遠鏡，而成名。所以牛頓在實用的物理上，也很有成就，這讓他能有時間慢慢醞釀他偉大的理論與數學工具。

表一、成就萬有引力定律的巨人們

			
哥白尼 1473~1543	第谷·布拉赫 1546~1601	刻卜勒 1571~1630	牛頓 1643~1727
	1572 超新星 (第谷超新星)	1604 超新星 (刻卜勒超新星)	
	1577 大彗星		1680 掠日大彗星
敢與傳統對抗之 新理論建構學者	設計觀測計畫、 收集觀測資料 ⁴	統計分析觀測資料 找自然的數學和諧	建構理論 精準解釋 觀測結果並作預測

值得一提的是，地球上的小冰河時期（約 1600 年至 1770 年間），對應太陽黑子的 Maunder minimum (約 1650 年至 1715 年間) 時期（如圖一）。這時期太陽黑子不明原因暫時消失。根據我的太陽差動自轉成因理論推估，大彗星，尤其是掠日彗星，會影響太陽對流層的對流，進而影響太陽活躍週期，因此，第谷·布拉赫所看到的 1577 年大彗星以及牛頓所看到的 1680 年掠日大彗星都可能造成太陽黑子數量大幅減少⁵。當太陽黑子數量長時間減少時，會導致太陽風終止震波 (termination shock, 約為在 100AU 附近，該處太陽風由超音速降為次磁音速) 附近，來自日磁暴所噴發出來的磁雲數量，大幅減少，因此使得來自外太空的宇宙射線（高能正離子）可以毫無阻礙地進入內太陽系。這些高能宇宙射線大多來自新星或超新星爆炸。它們的能量高，地

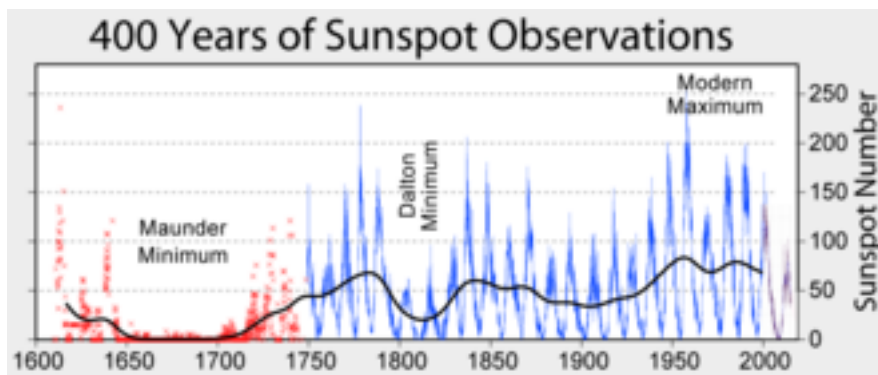
⁴ 伽利略 (Galileo Galilei, 1564~1642) 於 1604 年左右，研發了天文望遠鏡，因此第谷時代的天文觀測，沒有用到天文望遠鏡。伽利略也贊同哥白尼的學說

(https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei)，也因此被天主教廷軟禁在家中將近 40 年。

⁵ https://en.wikipedia.org/wiki/Maunder_Minimum

大彗星可能造成 Maunder minimum 太陽黑子數量減少。不過 1680 年卡西尼 (Giovanni Domenico Cassini) 所看到的一顆超大太陽黑子，可能也與 1680 年那顆掠日彗星有關。

球的磁層擋不住它們，因此它們可以進入大氣層，撞擊中性氣體分子，使它們游離成為帶電粒子。這些帶電粒子是很好的凝結核，可以成雲降水，影響地表溫度分佈，造成歐陸的小冰河時期。再加上，1572 年&1604 年所觀測到的超新星，表示當超新星爆炸光被我們看到時，這些高能宇宙射線也正以接近光速的速度，到達日磁層附近。剛巧此時太陽黑子數量又少，所以大量的宇宙射線，會毫無阻擋的進入內太陽系與地球大氣層中，是地球上產生極端氣候的元兇。此外，掠日彗星 (Sungrazing comet) 每次路過太陽，會被太陽的潮汐力，撕成碎片，因此科學家估計 SoHO 太空船觀測期間所看到的上千顆掠日彗星的源頭可能就是牛頓看到的 1680 年大彗星的殘骸。掠日彗星如何影響太陽週期與太陽黑子，這個理論，等我有空，再慢慢寫出來，告訴大家。



圖一、太陽黑子數的時間分佈週期與 Maunder Minimum (摘自 https://en.wikipedia.org/wiki/Maunder_Minimum)

3.2. 牛頓的萬有引力模式 與 刻卜勒的三個行星運動定律

根據牛頓的萬有引力：行星（質量 m ）受到恆星（質量 M ）的引力為⁶

$$-\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

這個表示式本來應該是球面座標上的一個表示式。可是因為行星公轉面在短時間內，幾乎不變，因此牛頓用「極座標」，或「 $z = 0$ 處的柱面座標」來描述行星與彗星的公轉運動。以下是根據牛頓第二運動定律所寫出來的 \hat{r} 分量與 $\hat{\theta}$ 分量的運動方程式。

$$\hat{r} : \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = ma_r = F_r = -\frac{GMm}{r^2} \quad (1)$$

$$\hat{\theta} : \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = ma_\theta = F_\theta = 0 \quad (2)$$

$$\hat{r} : \quad v_r = \dot{r} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} : \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (4)$$

⁶ 牛頓怎麼想出這個萬有引力的形式，歷史上好像沒有紀錄。可是我們可以很合理的猜測：萬有引力的方向不含 $\hat{\theta}$ 的分量，這應該是從蘋果總是垂直落下，不會斜向落下，得到的線索。至於為何萬有引力的方向是與距離平方成反比，這應該是從刻卜勒第三個行星運動定律：行星「公轉週期」的平方與行星「橢圓軌道半長軸長」的三次方成正比，所得到的靈感。因為，圓形軌道是橢圓軌道的一個特例。所以牛頓可用圓形軌道來估算萬有引力大小與行星-恆星距離的關係。假設行星公轉軌道是個半徑為 R 的正圓，公轉週期為 T 。若萬有引力會造成一個向心加速度，且萬有引力與距離的 n 次方成反比，則

$$-\hat{r} \frac{GMm}{R^n} = -\hat{r} \frac{mv^2}{R} = -\hat{r} \frac{m \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2}{R} = -\hat{r} \frac{m4\pi^2 R}{T^2}$$

因此

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{R^{n+1}}{T^2}$$

當 $n = 2$ 時，可得

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

因此，由克卜勒的第三個行星運動定律可知，萬有引力必須隨距離平方成反比。

刻卜勒的三個行星運動定律

- I. 行星的軌道是一個以恆星為一個焦點的橢圓。
 - II. 單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 相等。
 - III. 行星「公轉週期」的平方與行星「橢圓軌道半長軸長」的三次方成正比。
- 以下我們將依次討論 II, I, III 這三個行星運動定律。

3.3. 面積定律 v.s. 中心力

首先請各位猜猜看，造成「II. 單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 相等」這種現象背後的物理過程是什麼？

答案是：角動量守恆！

再請大家想一想，什麼條件下，角動量會守恆？

答案可能是：不受力的情況下。可是行星與恆星之間有萬有引力啊！所以，另一個答案就是：中心力！

現在就讓我們證明一下，在中心力的作用下，「單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 會相等」。

問：什麼是「中心力 Central Force」？

答： $\vec{F} = \hat{r}F_r$ 就是中心力。

問：為什麼中心力的作用下，角動量守恆？

答：因為

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{r}r \times \hat{r}F_r = 0$$

問：行星繞著恆星打轉的角動量 為何？

答： $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$ 。因為 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ 。由方程式 (2) & (3) 可得

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = (r\hat{r}) \times m(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}) = (r\hat{r}) \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} = L_z\hat{z}$$

問：單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 為何？

答：在一個非常短的單位時間 Δt 內，行星與恆星連線 所掃過的面積 近似於一個三角形。高為 $r(t)$ ，所掃過的底邊弧長為

$$r(t)\Delta\theta = r(t) \left[\theta \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \theta \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

所以單位時間 Δt 所掃過的面積為

$$\Delta S = \frac{1}{2} r(t) r(t)\Delta\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{\theta \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \theta \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right)}{\Delta t} \Delta t \approx \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \Delta t$$

因為

$$L_z = mr^2\dot{\theta} = \text{constant in time} \quad (5)$$

所以

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L_z}{2m} = \text{constant in time} \quad (6)$$

也就是說，單位時間 Δt 行星與恆星連線 所掃過的面積 ΔS 正比於 公轉的角動量，所以在「中心力」的作用下，角動量守恆，所以單位時間內 行星與恆星連線 所掃過的面積 也會相等。

結論一：牛頓的萬有引力的方向是沿著 $-\hat{r}$ 方向，這就直接解釋了 **克卜勒的第二個行星運動定律**：「單位時間 行星與恆星連線 所掃過的面積 相等」

事實上，我們若將方程式(5)對時間微分得

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = mr(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = rF_\theta = 0$$

因此方程式(2)與方程式(5) 意義相同。

3.4. 行星的軌道

我們將說明哪些條件可以導致「I. 行星的軌道是一個以恆星為一個焦點的橢圓」。

在證明橢圓軌道的定律前，我們先來分析一下行星的運動方程式，以及所有可能的解。首先，根據方程式(5)這個關係式，我們可以把方程式(1)中的 $\dot{\theta}$ 用 L_z/mr^2 來取代。也就是

$$\dot{\theta} = \frac{L_z}{mr^2} \quad (7)$$

將方程式(7) 代入方程式(1)中消去 $\dot{\theta}$ 可得

Substituting Equation (7) into Equation (1) to eliminate $\dot{\theta}$, it yields

$$m \left[\ddot{r} - r \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)^2 \right] = m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2} \quad (8)$$

方程式(7) & (8) 可以決定行星公轉軌跡 $\{ r(t), \theta(t) \}$

3.4.1. 數值積分法

給定一組初始條件，我們可以用各種「數值方法」(numerical methods, such as Euler method, the 2nd order Runge-Kutta method, or the 4th order Runge-Kutta method) 來解方程式(7) & (8). 因為所有的數值方法只能解一階微分方程式，所以我們必須將方程式(7)&(8)改寫為

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} \\ \frac{L_z}{mr^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

假設 $m \ll M$ ，只要給定 $t = 0$ 時的 $r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ ，就可以求出 $L_z = mr^2\dot{\theta}$ ，以及聯立方程式(9)等號右側的每一項數值。於是就可以用數值方法，求下一個時間的 r, \dot{r}, θ 。然後再代回右側，求再下一個時間的 r, \dot{r}, θ 。以最簡單的尤拉法 (Euler Method) 為例 若已知 $t = 0$ 時的 $\{r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}\}$ ，可得 $L_z = (mr^2\dot{\theta})_{t=0}$ ，則由方程式(9) 可得

$$\begin{aligned} (r)_{t=\Delta t} &= (r)_{t=0} + \Delta t (\dot{r})_{t=0} \\ (\dot{r})_{t=\Delta t} &= (\dot{r})_{t=0} + \Delta t \left(\frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} \right)_{t=0} \\ (\theta)_{t=\Delta t} &= (\theta)_{t=0} + \Delta t \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)_{t=0} \end{aligned}$$

然後將以上 $t = \Delta t$ 的結果代入方程式(9) 可得，

$$\begin{aligned} (r)_{t=2\Delta t} &= (r)_{t=\Delta t} + \Delta t (\dot{r})_{t=\Delta t} \\ (\dot{r})_{t=2\Delta t} &= (\dot{r})_{t=\Delta t} + \Delta t \left(\frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} \right)_{t=\Delta t} \\ (\theta)_{t=2\Delta t} &= (\theta)_{t=\Delta t} + \Delta t \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)_{t=\Delta t} \end{aligned}$$

再將以上 $t = 2\Delta t$ 的結果代入方程式(9) 可得，

$$\begin{aligned} (r)_{t=3\Delta t} &= (r)_{t=2\Delta t} + \Delta t (\dot{r})_{t=2\Delta t} \\ (\dot{r})_{t=3\Delta t} &= (\dot{r})_{t=2\Delta t} + \Delta t \left(\frac{L_z^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2} \right)_{t=2\Delta t} \\ (\theta)_{t=3\Delta t} &= (\theta)_{t=2\Delta t} + \Delta t \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)_{t=2\Delta t} \end{aligned}$$

如此重複下去，可得行星公轉軌跡 $\{ r(t), \theta(t) \}$ 。這樣的尤拉法，只考慮微分時，泰勒展開的第一項，所以是一種粗略的算法。精確度較差。這種做法中，所選取的積分時間步驟 Δt 必須遠小於行星公轉週期。最好小於千分之一公轉週期。

除了數值積分誤差外，數值方法的另一個缺點是，一次只能找到一個解。如果想要了解所有可能的解，就要利用一些常用的解題技巧。

3.4.2. 虛擬位能法 (判定是否可能有封閉性的週期運動)

要定性的求出方程式(8)的所有解的形式，科學家常用的方法是「虛擬位能法⁷」 (pseudo-potential method)。我們希望將 (8)式寫成類似一個「粒子在位能井中運動的方程式」，也就是像這樣：

$$m\ddot{r} = \frac{L_z^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} = -\frac{d'V'(r)}{dr} \quad (10)$$

其中 ' $V'(r)$ ' 就是一個虛擬的位能結構 (一般力學課本上稱它為「有效位能」 effective potential)。由方程式(10)可知，虛擬位能 (有效位能) 會滿足以下的微分方程式

$$\frac{d'V'(r)}{dr} = \frac{GMm}{r^2} - mr \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)^2 \quad (11)$$

將(11)式對 r 積分，可得

$$'V'(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + 'V'(r \rightarrow -\infty) \quad (12)$$

取' $V'(r \rightarrow -\infty) = 0$ '，可得

$$'V'(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} \quad (13)$$

所以，只要畫出 ' $V'(r)$ ' 的圖形，就可以根據方程式(10)，大致估算 $r(t)$ 解的形式。

⁷ 說明：所謂的「虛擬位能法」就是將二階常微分方程式設法寫成一個類似「粒子在位能井中運動的方程式」，這樣藉著「觀察」「虛擬位能井的結構」，可以「定性地」(qualitatively) 了解在不同「參數」下，此二階常微分方程式，會有哪些解。除了這個「中心力」的問題外，另一個很有名的例子就是研究孤波(soliton) 問題的 Korteweg–de Vries (KdV) equation 的定性解所用到的 pseudo-potential method。(可參閱 Wikipedia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Korteweg–de_Vries_equation

其他還有電漿物理中研究「靜電孤波」的 Sagdeev potential 也是一種虛擬位能。

(e.g., http://fusion.k.u-tokyo.ac.jp/~takase/plasma1_ch13.pdf 我發現這份講義中的圖，全是抄襲 Professor F. F. Chen 所著的電漿物理導論課本(Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Second Edition)，但是卻沒有註明出處！這是個不太好的示範喔！)

另外，還有用來研究「電磁孤波」的虛擬的二維位能結構 (參考非線性電漿物理講義第三章 http://www.ss.ncu.edu.tw/~lyu/lecture_files_en/lyu_NLSPP_Notes/Lyu_NLSPP_Chapter3.pdf)。

另外，值得一提的是，方程式(13) 等號右邊第一項，就是重力位能

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (14)$$

其中

$$-\nabla V(r) = -\hat{r} \frac{GMm}{r^2} = \hat{r} F_r$$

Exercise 3.1 :

請根據(13)是，繪出 ' $V'(r)$ ' 的圖形。它應該跟課本 Figure 3-36 圖中，由上方算起，第三條曲線類似⁸。再請根據此 ' $V'(r)$ ' 的圖形，大致估算 $r(t)$ 解的形式。

3.4.3.另一種求虛擬位能（有效位能）的方法：

除了直接積分求解 ' $V'(r)$ ' 外，我們還可以利用能量守恆，來估算 ' $V'(r)$ '。這是一種解非線性問題常用的方法與解題技巧⁹。要介紹這種方法前，首先讓我們估算一下行星公轉的動能。

⁸ 課本上把「虛擬位能」（有效位能）表示為

$$V'(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

這樣就可以把結果應用於有吸引力也有斥力的帶電粒子運動的問題上了。課本上，圖 3-36 所顯示的四條線，由上而下所代表的物理過程分別為：

第一條線 ($K > 0, L > 0$) 可用來研究兩個正電荷，或兩個負電荷在斥力作用下進行散射時，所對應的虛位能結構。

第二條線 ($K = 0, L > 0$) 可用來描述一個被繩子拉住打轉的物體，突然繩子被切斷了，此物體運動所對應的虛位能結構。

第三條線 ($K < 0, L > 0$) 可用來描述一個行星在恆星的萬有引力作用下，行星運動所對應的虛位能結構。

第四條線 ($K < 0, L = 0$) 可用來描述一個在萬有引力作用下，自由落體所對應的虛位能結構。

⁹ Lyu, L. H. (2010), *Nonlinear Space Plasma Physics (I) Lecture Notes, Chapter 3*.

http://www.ss.ncu.edu.tw/~lyu/lecture_files_en/lyu_NLSPP_Notes/lyu_NLSPP_Content.html

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \cdot (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \quad (15)$$

其中 $m r^2 \dot{\theta}^2 / 2$ 是一種轉動動能 ($I \omega^2 / 2$)。將(7)式代入(15)式，消去 $\dot{\theta}^2$ ，得

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} \quad (16)$$

若行星的自轉動能遠小於其公轉動能，則行星的動能約等於行星的公轉動能。

附錄 A 中，就以地球為例，證明了地球公轉的動能遠大於地球自轉的動能。由方程式(13)中行星的重力位能(V)與方程式(16)中行星的公轉動能(T)，可得行星公轉運動的總能(E)，約為

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (17)$$

因為行星公轉所受的恆星引力是一種保守力，若恆星的質量 M 遠大於行星的質量 m ($M \gg m$)，且我們考慮的時間尺度夠短，短到可以忽略其他恆星對此恆星運動的影響，因此可以假設恆星位置固定不動，所以恆星所產生的重力位 ($-GM/r$) 分佈，不隨時間而改變。則行星總能量會守恆，也就是

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \right) = 0 \quad (18)$$

接著，讓我們應用第二章補充講義上所介紹過的方法，將方程式(10)等號兩邊都乘以 \dot{r} ，可得

$$\dot{r} m \ddot{r} = - \frac{d'V'(r)}{dr} \dot{r}$$

或

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} \right) = - \frac{d'V'(r)}{dr} \frac{dr}{dt} = - \frac{d'V'(r)}{dt}$$

上式移項得

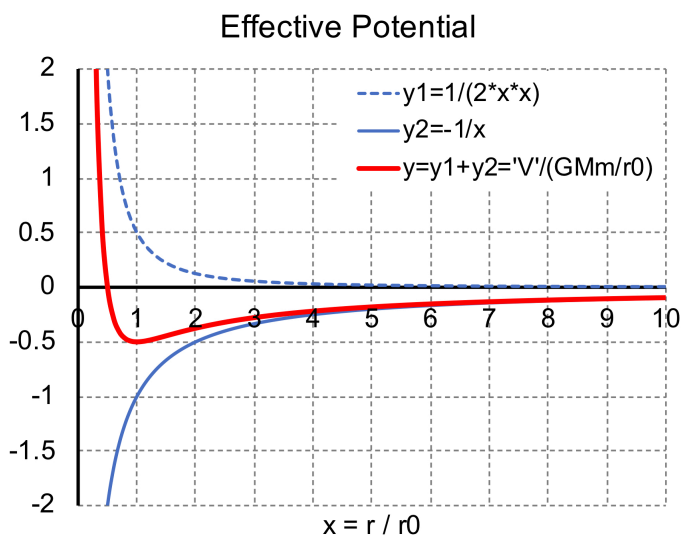
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + 'V'(r) \right) = 0 \quad (19)$$

比較(18)式與(19)式，可得與(11)&(12)式相同的虛擬位能 (或 有效位能)

$$'V'(r) = - \frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + 'V'(r \rightarrow -\infty)$$

以上就是利用能量守恆來求虛擬位能（有效位能） $V'(r)$ 的另一種漂亮的方法¹⁰。

圖二中紅色曲線為有效位能 $V'(r)$ 的分佈圖。圖中橫軸為歸一化的(normalized)徑向長度 $x = r/r_0$ ，我們取有效位能最低點的徑向位置 r_0 為橫軸的單位長度。我們取 $GMm/r_0 = L_z^2/mr_0^2$ 為縱軸的單位能量。藍色虛線為歸一化的行星公轉角速度所對應的動能 $y_1 = (L_z^2/2mr^2)/(L_z^2/mr_0^2) = 1/2x^2$ ，藍色實線為歸一化的行星重力位能 $y_2 = (-GMm/r)/(GMm/r_0) = -1/x$ ，紅色曲線為歸一化的有效位能 $y = y_1 + y_2 = V'/(GMm/r_0)$ 。



圖二、有效位能 $V'(r)$ 的分佈圖（紅色曲線）

¹⁰ 在靜電孤波(electrostatic soliton)的研究中，我們也可以利用能量守恆來求 Sagdeev potential [e.g., Ref. 1]. 在電磁孤波(electromagnetic soliton)的研究中，我們可以利用能量通量守恆來求 Pseudo-potential [e.g., Ref.2~4].

[1] Section 8.3 in Chen, F. F. (1984), *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion, Volume 1: Plasma Physics*, 2nd edition, Plenum Press, New York.

[2] Montgomery, D., Nonlinear Alfvén waves in a cold ionized gas, *Phys. Fluids*, 2, 585, 1959.

[3] Lyu, L. H., and J. R. Kan, Nonlinear two-fluid hydromagnetic waves in the solar wind: Rotational discontinuity, soliton, and finite-extent Alfvén wave train solutions, *J. Geophys. Res.*, 94, 6523, 1989.

[4]http://www.ss.ncu.edu.tw/~lyu/lecture_files_en/lyu_NLSPP_Notes/Lyu_NLSPP_Chapter3.pdf

將方程式(17)配合圖二，一起討論可得：只要總能量（位能 + 動能）小於零，行星的軌跡就會被束縛在一個位能井的結構中，其中近日點為 r_a ，遠日點為 r_b 。這時橢圓的軌跡就是一種可能的解。當總能量（位能 + 動能）等於零或大於零時，行星的軌跡就不會被束縛在一個位能井的結構中。這時可能的解就包括了拋物線與雙曲線。

但是要進一步驗證封閉的行星軌跡是一個以恆星為一焦點的橢圓軌跡，我們就需要一些更嚴格的證明：證明萬有引力所寫出來的常微分運動方程式(1)&(2)確實可以得到橢圓的軌跡圖型。

3.5. 行星繞日運動為橢圓軌道

要證明克卜勒的第一個行星運動定律，也就是橢圓軌道的定律，需要先了解橢圓軌道的方程式。**附錄 B**，用兩種方法推導以焦點為原點的橢圓方程式可寫成

$$r = \frac{(1 - \epsilon^2)a}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (20)$$

我們也有兩種方式證明，滿足(20)式 $r(\theta)$ 的微分方程式，與行星的運動方程式(1)式與(2)式所推得的 $r(\theta)$ 的微分方程式是一致的。

因為(20)式中， $\cos \theta$ 在分母，因此很難直接寫出 $r(\theta)$ 的微分方程式。不過，山不轉路轉，我們可以考慮一個新的函數

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \quad (21)$$

Substituting Equation (21) into Equation (20), it yields

$$u(\theta) = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{(1 - \epsilon^2)a} \quad (22)$$

Differentiating Equation (22) twice with respected to θ , it yields

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = \frac{-\epsilon \cos \theta}{(1 - \epsilon^2)a} = -u(\theta) + \frac{1}{(1 - \epsilon^2)a} \quad (23)$$

Equation (23) can be written as

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{1}{(1 - \epsilon^2)a} \quad (24)$$

Now, substituting Equation (21) into Equation (24) to eliminate $u(\theta)$, it yields an ordinary differential equation (O.D.E.) of $r(\theta)$ ¹¹

$$\left(\frac{2}{r^3}\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a} \quad (25)$$

現在讓我們看看與行星的運動方程式(7)式與(8)式所推得的 $r(\theta)$ 的微分方程式長什麼樣。若考慮 $r(t) = r(\theta(t))$ 則

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \\ &= \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \right] \dot{\theta} + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (27)$$

Substituting Equation (27) into Equation (1) to eliminate \ddot{r} , it yields

$$m \left[\left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \right) - r \dot{\theta}^2 \right] = -\frac{GMm}{r^2} \quad (28)$$

Substituting Equation (2) into Equation (28) to eliminate $\ddot{\theta}$, it yields

$$m \left[\left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 - \frac{dr}{d\theta} \frac{2\dot{\theta}}{r} \dot{\theta} \right) - r \dot{\theta}^2 \right] = -\frac{GMm}{r^2} \quad (29)$$

Substituting Equation (26) into Equation (29) to eliminate \dot{r} , it yields

$$m \left[\left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 - \frac{dr}{d\theta} \frac{2\dot{\theta}}{r} \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right) - r \dot{\theta}^2 \right] = -\frac{GMm}{r^2} \quad (30)$$

Equation (30) can be written as

$$\left[\frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{d^2r}{d\theta^2} + r \right] \dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2} \quad (31)$$

Finally, substituting Equation (7) into Equation (31) to eliminate $\dot{\theta}^2$, it yields

$$\left[\frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{d^2r}{d\theta^2} + r \right] \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)^2 = \frac{GM}{r^2} \quad (32)$$

Equation (32) can be written as

$$\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L_z^2} \quad (33)$$

¹¹ Substituting Equation (21) into Equation (24) to eliminate $u(\theta)$, it yields

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} = \frac{d}{d\theta} \left[-\left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} \right] + \frac{1}{r} = \left(\frac{2}{r^3} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a}$$

比較(33)式與(25)式可知，行星的運動方程式(1)式與(2)式所推得的 $r(\theta)$ 的微分方程式(33)式，確實與橢圓所推得的 $r(\theta)$ 的微分方程式(25)式一致。而且比較常數項可知

$$\frac{1}{(1-\epsilon^2)a} = \frac{GMm^2}{L_z^2} \quad (34)$$

再進一步分析(17)式所顯示的行星運動的總能 E 。考慮位在長軸的兩端點，近日點 $r = a - c = (1 - \epsilon)a$ 與遠日點 $r = a + c = (1 + \epsilon)a$ ，其總能分別為

$$E_{\text{近日點}} = \frac{L_z^2}{2ma^2(1-\epsilon)^2} - \frac{GMm}{(1-\epsilon)a} \quad (35)$$

$$E_{\text{遠日點}} = \frac{L_z^2}{2ma^2(1+\epsilon)^2} - \frac{GMm}{(1+\epsilon)a} \quad (36)$$

將(34)式代入(35)式或(36)式消去 L_z^2 ，都可得到

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (37)$$

這個結果，是不是跟高中學到的行星圓周運動時

$$E = -\frac{GMm}{2R}$$

很像？

我們再來看看克卜勒的第三個行星運動定律，如果行星公轉週期為 T ，由(6)式得行星公轉一週所掃過的橢圓面積為

$$S = \pi ab = \frac{L_z}{2m} T \quad (38)$$

因為 $b^2 = (1 - \epsilon^2)a^2$ 再利用(34)式，帶入消去 $(1 - \epsilon^2)a$ ，可得

$$b^2 = \frac{L_z^2}{GMm^2} a \quad (39)$$

將(38)式平方之，再利用(39)式將其中的 b^2 消去，可得

$$S^2 = \pi^2 a^2 \frac{L_z^2}{GMm^2} a = \frac{L_z^2}{4m^2} T^2 \quad (40)$$

我們可將(40)式改寫為

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (41)$$

這就是克卜勒的第三個行星運動定律。

3.6. 總結

如果我們能在實驗室中，測得重力常數 G ，則

- 我們可以藉由觀測行星的運動，測得行星橢圓軌道的「半長軸」長 a ，與公轉週期 T ，我們就可利用(41)式推算恆星質量 M 。
- 同理，我們可以藉由觀測衛星的運動，測得衛星橢圓軌道的「半長軸」長 a ，與公轉週期 T ，我們就可利用(41)式推算行星質量 m 。
- 將 GMm 的乘積除以長軸長 $2a$ ，由(37)式可知行星公轉總動能 $E = -GMm/2a$
- 我們可以藉由觀測行星橢圓軌道的離心率 ϵ ，半長軸長 a ，以及前述的 G, M, m 等物理量，根據(34)式，算出行星公轉的角動量

$$L_z = \sqrt{GMm^2(1 - \epsilon^2)a} \quad (42)$$

Exercise 3.2

本講義的推導已經假設恆星的質量 M 遠大於行星的質量 m ($M \gg m$)。如果兩顆繞轉星球的質量，相差不大($M \geq m$)，則以上結果是否應該做修正呢？

Exercise 3.3

如果恆星的質量 M 遠大於彗星的質量 m ($M \gg m$)，且彗星總能（動能 + 位能） ≥ 0 ，則此彗星的軌道可能有哪些形式？

(注意，本題中 我們還是取在 $r \rightarrow -\infty$ 處的重力位能為零。)

附錄 A

本文中的角動量與轉動動能，都是行星公轉的角動量與轉動動能。過去曾經有同學詢問為何不考慮自轉的角動量與轉動動能。這是一個好問題！有關自轉所導致的各種力學問題，我們將在第 7 章中討論。現在先讓我們以地球為例「估算」一下自轉的角動量與轉動動能 和 公轉的角動量與轉動動能 的比值大約是多少。

角動量

$$mr^2\dot{\theta} = I\omega$$

轉動動能

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

由於自轉軸與公轉軸通常不平行，因此角動量的方向可能會有差異。如果只比較大小，可得

$$\frac{\text{自轉角動量大小}}{\text{公轉角動量大小}} = \frac{I_{\text{自}}\omega_{\text{自}}}{I_{\text{公}}\omega_{\text{公}}} < \left(\frac{r_{\text{自}}}{r_{\text{公}}}\right)^2 \frac{\omega_{\text{自}}}{\omega_{\text{公}}} \quad (\text{A.1})$$

用小於這個符號的原因是因為地球質量如果呈現球型分佈，則自轉的轉動慣量

$I_{\text{自}} < mr_{\text{自}}^2$ 。同理

$$\frac{\text{自轉轉動動能}}{\text{公轉轉動動能}} = \frac{I_{\text{自}}\omega_{\text{自}}^2}{I_{\text{公}}\omega_{\text{公}}^2} < \left(\frac{r_{\text{自}}}{r_{\text{公}}}\right)^2 \left(\frac{\omega_{\text{自}}}{\omega_{\text{公}}}\right)^2 \quad (\text{A.2})$$

其中

$$\frac{\omega_{\text{自}}}{\omega_{\text{公}}} = 365 \approx 400 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{r_{\text{自}}}{r_{\text{公}}} = \frac{1R_E}{1AU} \approx \frac{1}{20000} \quad (\text{A.4})$$

(簡單的記憶與估算方式求 $(1R_E/1AU)$: 一個太陽的直徑上, 可以放約 100 個地球, $1AU$ 的直線距離上, 可以放約 100 個太陽。所以 $1AU$ 的直線距離上, 可以放大約 10000 個地球。因此 $1AU \approx 20000R_E$ 。)

將(A.3)&(A.4)式 代入 (A.1)&(A.2)式, 可得

$$\frac{\text{自轉角動量大小}}{\text{公轉角動量大小}} < \left(\frac{1}{20000}\right)^2 400 \approx 10^{-6} \ll 1$$

以及

$$\frac{\text{自轉轉動動能}}{\text{公轉轉動動能}} < \left(\frac{1}{20000}\right)^2 (400)^2 \approx 4 \times 10^{-4} \ll 1$$

因此以地球為例可知, 行星自轉的角動量與轉動動能相對於公轉的角動量與轉動動能, 都非常小, 可以忽略。

附錄 B、焦點為原點的橢圓方程式

要證明克卜勒的第一個行星運動定律，也就是橢圓軌道的定律，需要先了解橢圓軌道的方程式。本附錄，將用兩種方法推導以焦點為原點的橢圓方程式。

方法一：將「直角坐標橢圓中心點為原點的橢圓方程式」轉換到「極座標以一焦點為原點的橢圓方程式」

如圖三的一個橢圓。假設橢圓沿 \hat{x} 方向「半長軸」長為 a ，沿 \hat{y} 方向「半短軸」長為 b 。各位學過的橢圓軌道方程式應該是：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.1})$$

假設橢圓的離心率為 ϵ ，則左右焦點 F' 與 F 應該分別位在 $(x = -\epsilon a, y = 0)$ 與 $(x = +\epsilon a, y = 0)$ 處。因為橢圓上任一點到兩焦點的距離和相等則可知

$$r' + r = 2a \quad (\text{B.2})$$

其中 r' 與 r 分別為橢圓邊上一點到 F' 與 F 的距離。考慮該點位在 $(x = 0, y = b)$ 處（如圖三中虛線所示），可得

$$b^2 + (\epsilon a)^2 = a^2$$

因此，可得

$$b^2 = (1 - \epsilon^2)a^2 \quad (\text{B.3})$$

如果以右側焦點 F 為新的原點，考慮極座標（柱面座標），橢圓邊上一點與 F 的連線為 r ，此連線與 x 軸的夾角為 θ ，則

$$x = r \cos \theta + \epsilon a \quad (\text{B.4})$$

$$y = r \sin \theta \quad (\text{B.5})$$

Substituting Equations (B.3), (B.4), and (B.5) into Equation (B.1), to eliminate b^2 , x , and y , respectively, it yields

$$\frac{(r \cos \theta + \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \theta)^2}{(1 - \epsilon^2)a^2} = 1 \quad (\text{B.6})$$

經過一些計算與化簡，由(B.6)式可得¹²，

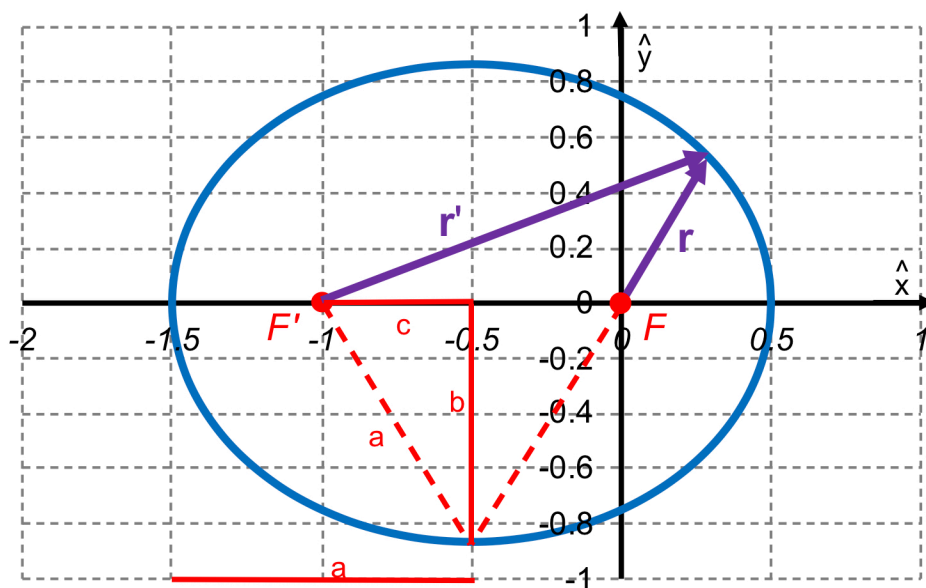
$$[r + \epsilon \cos \theta r - (1 - \epsilon^2)a][r - \epsilon \cos \theta r + (1 - \epsilon^2)a] = 0 \quad (\text{B.7})$$

也就是

$$r = \frac{(1 - \epsilon^2)a}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{B.8})$$

$$r = \frac{-(1 - \epsilon^2)a}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (\text{B.9})$$

因為橢圓的離心率 $0 < \epsilon < 1$ ，因此方程式(B.9)式中 $r < 0$ 。所以只有方程式(B.8)一組解。因此方程式(B.8)就是橢圓以一個焦點為原點的極座標方程式。



圖三、一個離心率為 0.5 的橢圓 ($c=0.5a$)

¹² Equation (B.6)

$$\Rightarrow (r \cos \theta + \epsilon a)^2 (1 - \epsilon^2) + (r \sin \theta)^2 = (1 - \epsilon^2)a^2$$

$$\Rightarrow (r \cos \theta)^2 - \epsilon^2 (r \cos \theta)^2 + 2\epsilon ar \cos \theta (1 - \epsilon^2) + (\epsilon a)^2 (1 - \epsilon^2) + (r \sin \theta)^2 - (1 - \epsilon^2)a^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - \epsilon^2 \cos^2 \theta r^2 + 2\epsilon ar \cos \theta (1 - \epsilon^2) - (1 - \epsilon^2)a^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - [\epsilon \cos \theta r - (1 - \epsilon^2)a]^2 = 0$$

$$\Rightarrow [r + \epsilon \cos \theta r - (1 - \epsilon^2)a][r - \epsilon \cos \theta r + (1 - \epsilon^2)a] = 0$$

方法二：利用向量運算，直接求「極座標以一焦點為原點的橢圓方程式」

由圖三可得

$$\vec{r}' = 2c\hat{x} + \vec{r} = 2\epsilon a\hat{x} + (r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}) \quad (\text{B.10})$$

Equation (B.10) yields

$$r'^2 = (2\epsilon a + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4\epsilon ar \cos \theta \quad (\text{B.11})$$

Substituting Equation (B.2) into Equation (B.11) to eliminate r' , it yields

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4\epsilon ar \cos \theta$$

Or

$$4a^2 - 4ar = 4\epsilon^2 a^2 + 4\epsilon ar \cos \theta \quad (\text{B.12})$$

For $a > 0$ and $\epsilon < 1$, Equation (B.12) can be written as

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (\text{B.13})$$

Equation (B.13) is the same as Equation (B.8).

Exercise 3.4

請用與方法二類似的方法找出：課本(3-250)式的拋物線極座標方程式，以及課本(3-248)式的雙曲線極座標方程式。

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta} \quad \text{課本(3-250)}$$

$$r = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \epsilon \cos \theta} \quad \text{課本(3-248)}$$

其中「+」號為引力的軌道解，「-」號為斥力的軌道解，且離心率 $\epsilon > 1$ 。

附錄 C、除了橢圓之外的軌跡解

參考如何由橢圓極座標方程式(20) 推得方程式 (24)&(25)，我們也可將課本(3-250)式的拋物線極座標方程式，以及課本(3-248)式的雙曲線極座標方程式，推得一組類似方程式(24)&(25) 的形式。

令 $u = 1/r$ ，課本(3-250)式的拋物線極座標方程式可得

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{1}{a} \quad (\text{C.1})$$

將 $u = 1/r$ 帶回方程式(C.1) 得

$$\left(\frac{2}{r^3}\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \quad (\text{C.2})$$

比較方程式(33)與方程式(C.2)可得，當彗星軌道為拋物線時

$$\frac{1}{a} = \frac{GMm^2}{L_z^2} \quad (\text{C.3})$$

其中拋物線近日點位置為 $a/2$ 。再分析此彗星運動位在拋物線近日點的總能 E

$$E_{\text{拋物線}} = \frac{L_z^2}{2m(a/2)^2} - \frac{GMm}{a/2} \quad (\text{C.4})$$

將(C.3)式代入(C.4)式消去 L_z^2 ，可得到

$$E_{\text{拋物線}} = 0 \quad (\text{C.5})$$

同理，令 $u = 1/r$ ，課本(3-248)式中引力的雙曲線極座標方程式（取+號）可得

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + u(\theta) = \frac{+1}{(\epsilon^2 - 1)a} \quad (\text{C.6})$$

將 $u = 1/r$ 帶回方程式(C.6) 得

$$\left(\frac{2}{r^3}\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{+1}{(\epsilon^2 - 1)a} \quad (\text{C.7})$$

其中離心率 $\epsilon > 1$ 。比較方程式(33)與方程式(C.7)可得，當彗星軌道為雙曲線時

$$\frac{+1}{(\epsilon^2 - 1)a} = \frac{GMm^2}{L_z^2} \quad (\text{C.8})$$

其中雙曲線近日點位置為 $a(\epsilon - 1)$ 。再分析此彗星運動位在雙曲線近日點的總能

$$E_{\text{雙曲線}} = \frac{L_z^2}{2ma^2(\epsilon - 1)^2} - \frac{GMm}{a(\epsilon - 1)} \quad (\text{C.9})$$

將(C.8)式代入(C.9)式消去 L_z^2 ，可得到

$$E_{\text{雙曲線}} = \frac{GMm}{2a} > 0 \quad (\text{C.10})$$

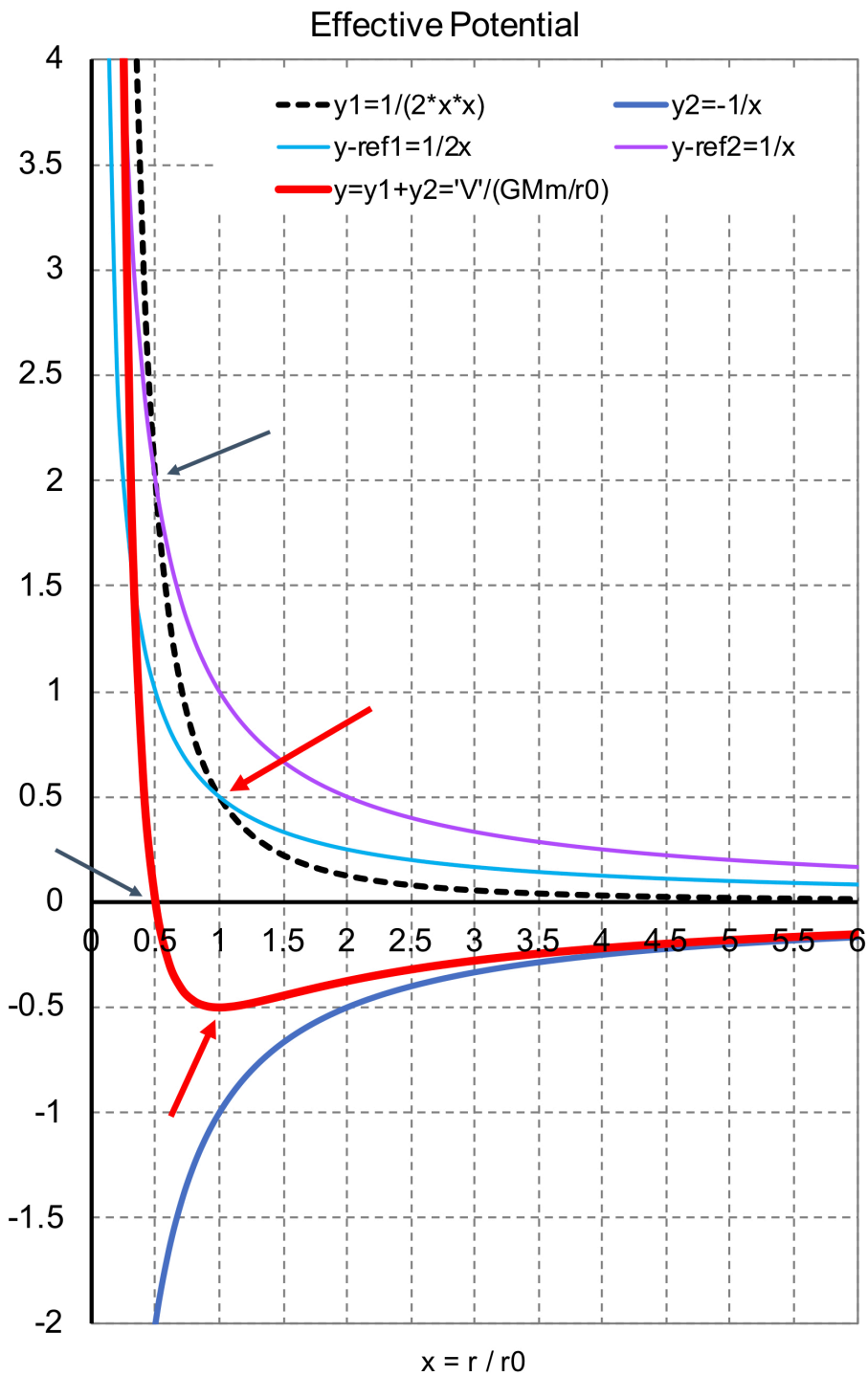
比較(37)式

$$E_{\text{橢圓、圓}} = -\frac{GMm}{2a} < 0 \quad (\text{C.11})$$

可知：彗星運動的總能小於零時，彗星公轉軌道將為封閉的橢圓或圓形軌道，當彗星運動的總能等於零時，彗星公轉軌道將為開放的拋物線軌道，當彗星運動的總能大於零時，彗星公轉軌道將為開放的雙曲線軌道。

圖四，與圖三類似，繪出黑色虛線為歸一化的行星公轉角速度所對應的動能 $y_1 = (L_z^2/2mr^2)/(L_z^2/mr_0^2) = 1/2x^2$ ，深藍色實線為歸一化的行星重力位能 $y_2 = (-GMm/r)/(GMm/r_0) = -1/x$ ，紅色粗線為歸一化的有效位能 $y = y_1 + y_2 = 'V'/(GMm/r_0)$ 。另外，又畫了兩條參考線：淺藍色實線為 $y_{ref1} = +1/2x$ ，淺紫色實線為 $y_{ref2} = +1/x$ 。由圖中可知，當紅色曲線總能位在最低點時， $y_1 = y_{ref1}$ 。當紅色曲線總能位等於零時， $y_1 = y_{ref2}$ 。

綜合方程式 (C.5), (C.10), (C.11) 以及圖四的結果可知，若模擬一個彗星軌跡，且初始的徑向速度大小為 0，則可以藉由比較初始的打轉動能大小（虛線）與該處的重力位能絕對值的一半（ y_{ref1} ）與重力位能絕對值的一倍（ y_{ref2} ）之差異，來決定積分軌道形式。總結如表二。



圖四、由模擬初始條件評估彗星軌道形式

表二、由模擬的初始條件評估彗星軌道特性

初始徑向速率	初始公轉轉動動能	軌道特性 & 模擬初始位置
$v_{r0} = 0$	$\frac{mv_{\theta 0}^2}{2} < \frac{GMm}{2r_0}$	橢圓 & 遠日點
$v_{r0} = 0$	$\frac{mv_{\theta 0}^2}{2} = \frac{GMm}{2r_0}$	正圓
$v_{r0} = 0$	$\frac{GMm}{2r_0} < \frac{mv_{\theta 0}^2}{2} < \frac{GMm}{r_0}$	橢圓 & 近日點
$v_{r0} = 0$	$\frac{mv_{\theta 0}^2}{2} = \frac{GMm}{r_0}$	拋物線 & 近日點
$v_{r0} = 0$	$\frac{GMm}{r_0} < \frac{mv_{\theta 0}^2}{2}$	雙曲線 & 近日點

其中 r_0 為模擬時初始的彗星與恆星距離， v_{r0} 為模擬時初始的彗星的徑向速率大小， $mv_{\theta 0}^2/2 = L_z^2/2mr_0^2$ 為模擬時初始的彗星的公轉轉動慣量所對應的動能大小， $-GMm/r_0$ 為模擬時初始的彗星的重力位能