2. Motion of a Particle in a One-Dimensional System

課本第二章的內容，有一半是數學問題，也就是在解二階常微分方程式。因為是二階常微分方程式，所以每一個變數，需要提供兩組初始條件。通常是時間 $t = 0$ 時，質點的位置與速率大小。可能的問題形式如附錄一。各位可以試著給不同的初始條件，就可以得到不同的理論解形式。

除了學會如何解「二階常微分方程式」(The 2nd order ordinary differential equation) ，在此我們補充說明：其他課本在這個議題上，常常會介紹的一個重要的概念，那就是位能與動能互換的概念，以及它們適用的情境。此外，如果給定一個位能函數，我們還可以估算在穩定區附近，質點運動的震盪頻率。

2.1. Conservative force 保守力

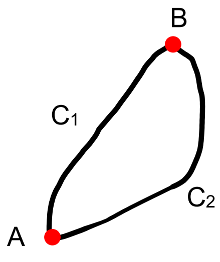
要介紹位能之前，讓我們先了解一下，什麼是「保守力」。

Q1: What is conservative force (保守力)?

課堂上有位同學回答，與位移無關！（雖然沒有主詞，但是老師聽得懂！）

是的，保守力 conservative force $\vec{F}$ 由 A 點到 B 點所做「功」，與位移無關！也就是

$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{A,\,C_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



因此

$$\int_{A,\,C_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \int_{B,\,C_2}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_{\substack{C(S)\\=C_1+C_2}} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

因此保守力$\vec{F}$ 會滿足$\nabla\times\vec{F} = 0$，因為 Stokes theorem (詳見附錄二的證明)

$$\oint_{C(S)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_{S(C)} \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{a}$$

其中$C(S)$ 表示包圍 面積S 的封閉曲線 C 。反之，$S(C)$ 表示被封閉曲線 C所包圍的 面積S。由於保守力$\vec{F}$ 滿足$\nabla \times \vec{F} = 0$，因此保守力$\vec{F}$ 可寫為

$$\vec{F} = -\nabla\Phi$$

所以保守力是一種 potential force 。

Exercise:

請證明，任何一個純量場 $\Phi(x, y, z)$ 的梯度的旋度恆為零，也就是證明

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

以上的結果，可以應用到其他物理領域。比方說，在流體力學中，一個無旋的流場滿足$\nabla \times \vec{V} = 0$，因此無旋的流場 (irrotational flow) 可以用 potential flow $\vec{V} = -\nabla\Phi$ 來表示之。在電磁學或電動力學中，一個靜電場 $\vec{E}^{ES}$ (electrostatic electric field)，並不是電場不隨時間變化，而是磁場不隨時間變化。由 Faraday's Law

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可知靜電場$\vec{E}^{ES}$滿足

$$\nabla \times \vec{E}^{ES} = 0$$

因此靜電場$\vec{E}^{ES}$可用電位表示之。也就是

$$\vec{E}^{ES} = -\nabla\Phi$$

小結一下，以下三種說法，都是問題 Q1 的答案：

保守力 $\vec{F}$ 由 A 點到 B 點所做「功」，與位移無關！

保守力 $\vec{F}$ 滿足 $\nabla \times \vec{F} = 0$

保守力 $\vec{F}$ 是一種 potential force，可以表示為 $\vec{F} = -\nabla\Phi$

其中 Φ 就是一種「位能函數」。

2.2. 位能與動能

考慮一團質點，每個質點的質量均為 m，第k個質點的位置為$x_k(t)$。If these particles are moving in a one-dimensional steady-state conservative force field, then we can show that the sum of the kinetic energy and potential energy of each particle is constant with time.

Since the force field F is a steady-state force field, we have $\partial F/\partial t = 0$. Since the force field F is a one-dimensional conservative force field, it can be written as

$$F(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx}$$

我們可以透過運動方程式，將「位能」與「動能」兩個概念串起來。讓我們先假設第k個質點的運動是一個一維的非相對性的（non-relativistic）運動（也就是說，質點速率遠小於光速），因此它的運動方程式可寫為

$$m\frac{d^2x_k(t)}{dt^2} = -\frac{d\Phi(x)}{dx}\bigg|_{x=x_k(t)} \tag{2.1}$$

通常「一個二階常微分方程式」可改寫為「兩個一階常微分方程式」，因此(2.1)式可改寫為

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = v_k(t) \tag{2.2}$$

$$m\frac{dv_k(t)}{dt} = -\frac{d\Phi(x)}{dx}\bigg|_{x=x_k(t)} \tag{2.3}$$

將(2.3)式等號兩側同乘$v_k(t)$，可得 等號左側(Left-Hand Side, LHS)為

$$LHS = v_k(t)m\frac{dv_k(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m[v_k(t)]^2\right) \tag{2.4}$$

等號右側(Right-Hand Side, RHS)為

$$RHS = -v_k(t)\frac{d\Phi(x)}{dx}\bigg|_{x=x_k(t)} = -\frac{dx_k(t)}{dt}\frac{d\Phi(x)}{dx}\bigg|_{x=x_k(t)} = -\frac{d\Phi\big(x_k(t)\big)}{dt} \tag{2.5}$$

Since RHS=LHS, Equations (2.4) and (2.5) yields

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m[v_k(t)]^2\right) = -\frac{d\Phi\big(x_k(t)\big)}{dt}$$

Or

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m[v_k(t)]^2 + \Phi\big(x_k(t)\big)\right) = 0 \tag{2.6}$$

也就是說，沿著第k個質點的運動軌跡，質點的動能$(1/2)m[v_k(t)]^2$ 與質點所感受到的位能$\Phi\big(x_k(t)\big)$之和為常數。

注意： “steady-state” and “conservative” force field 這兩個條件，是讓「位能＋動能＝constant」的必要條件。若觀測者看到的保守力場對應的位能結構會隨時間改變其分佈(i.e., potential field Φ is not a steady-state potential field)，則 (2.3)式變成

$$m\frac{dv_k(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_k(t)} \tag{2.7}$$

將(2.7)式等號兩側同乘$v_k(t)$，可得 等號左側(Left-Hand Side, LHS)為

$$LHS = v_k(t)m\frac{dv_k(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m[v_k(t)]^2\right) \tag{2.8}$$

等號右側(Right-Hand Side, RHS)為

$$\begin{aligned} RHS = -v_k(t)\left.\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_k(t)} &= -\frac{dx_k(t)}{dt}\left.\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_k(t)} \\ &= -\left[\frac{d\Phi(x_k(t),t)}{dt} - \frac{\partial\Phi(x_k(t),t)}{\partial t}\right] \neq -\frac{d\Phi(x_k(t),t)}{dt} \end{aligned} \tag{2.9}$$

因此當保守力場所對應的位能結構分佈會隨時間改變時，(2.8)式與(2.9)式推得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m[v_k(t)]^2 + \Phi(x_k(t),t)\right) \neq 0$$

也就是說，此時 質點的 動能＋位能，並不守恆。

以上的推導，也適用於二維與三維的位能場。例如，假設一個保守場

$$\vec{F}(x,y,z) = -\nabla\Phi = -\left[\hat{x}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\right] \tag{2.10}$$

第k個質點的運動方程式為

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = v_{kx}(t) \tag{2.11}$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = v_{ky}(t) \tag{2.12}$$

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = v_{kz}(t) \tag{2.13}$$

$$m\frac{dv_{kx}(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_k(t)\\ y=y_k(t)\\ z=z_k(t)}} \tag{2.14}$$

$$m\frac{dv_{ky}(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_k(t)\\ y=y_k(t)\\ z=z_k(t)}} \tag{2.15}$$

$$m\frac{dv_{kz}(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=x_k(t)\\ y=y_k(t)\\ z=z_k(t)}} \tag{2.16}$$

Or, in vector forms

$$\frac{d\vec{r}_k(t)}{dt} = \vec{v}_k(t) \tag{2.17}$$

$$m\frac{d\vec{v}_k(t)}{dt} = -\nabla\Phi|_{x=x_k(t),\ y=y_k(t),\ z=z_k(t)} \tag{2.18}$$

Then, $\vec{v}_k(t)$ ·(2.18), it yields

$$LHS = \vec{v}_k(t)\cdot\ m\frac{d\vec{v}_k(t)}{dt} = \frac{1}{2}m\left\{[v_{kx}(t)]^2 + [v_{ky}(t)]^2 + [v_{kz}(t)]^2\right\} \tag{2.19}$$

$$RHS = -\left[v_{kx}(t)\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} + v_{ky}(t)\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} + v_{kz}(t)\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} \right]$$

$$= -\left[\frac{dx_k(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} + \frac{dy_k(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} + \frac{dz_k(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(x,y,z)}{\partial z}\bigg|_{\substack{x=x_k(t)\\y=y_k(t)\\z=z_k(t)}} \right] \quad (2.20)$$

$$= -\frac{d\Phi\big(x_k(t),y_k(t),z_k(t)\big)}{dt}$$

Since RHS=LHS, Equations (2.19) and (2.20) yields

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\{[v_{kx}(t)]^2 + [v_{ky}(t)]^2 + [v_{kz}(t)]^2\}\right) = -\frac{d\Phi\big(x_k(t),y_k(t),z_k(t)\big)}{dt}$$

Or

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\vec{v}_k(t)\cdot\vec{v}_k(t) + \Phi\big(x_k(t),y_k(t),z_k(t)\big)\right] = 0 \quad (2.21)$$

也就是說，如果$\partial\Phi/\partial t = 0$，則沿著第$k$個質點的運動軌跡，質點的動能 與 質點所感受到的位能$\Phi\big(x_k(t),y_k(t),z_k(t)\big)$之和，將不隨時間改變。

2.3. Small amplitude perturbations in a given steady-state potential field

考慮一個不隨間改變的一維位能結構$\Phi(x)$。若在$x = x_1$處，為$\Phi(x)$的一個 local minimum, 則

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}\bigg|_{x=x_1} = 0$$

and

$$\left.\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\right|_{x=x_1} = a_1 > 0$$

The Taylor expansion of $\Phi(x)$ near $x \approx x_1$ is

$$\begin{aligned}
\Phi(x) = \Phi(x = x_1) + (x - x_1)\left.\frac{d\Phi(x)}{dx}\right|_{x=x_1} &+ \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 \left.\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2}\right|_{x=x_1} \\
&+ \frac{1}{3!}(x - x_1)^3 \left.\frac{d^3\Phi(x)}{dx^3}\right|_{x=x_1} + \frac{1}{4!}(x - x_1)^4 \left.\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}\right|_{x=x_1} + \cdots \\
&= \Phi(x = x_1) + (x - x_1)\cdot 0 + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 a_1 \\
&+ \frac{1}{3!}(x - x_1)^3 \left.\frac{d^3\Phi(x)}{dx^3}\right|_{x=x_1} + \frac{1}{4!}(x - x_1)^4 \left.\frac{d^4\Phi(x)}{dx^4}\right|_{x=x_1} + \cdots
\end{aligned}$$

質量為m的質點，在x_1附近x處運動所受的力為

$$F(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx} = -a_1(x - x_1) - \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 \left.\frac{d^3\Phi(x)}{dx^3}\right|_{x=x_1} - \cdots$$

If $|x - x_1|$ is small enough such that

$$\left|\frac{1}{2!}(x - x_1)\left.\frac{d^3\Phi(x)}{dx^3}\right|_{x=x_1}\right| \ll a_1$$

則

$$F(x) = -\frac{d\Phi(x)}{dx} \approx -a_1(x - x_1)$$

因此質點，在x_1附近運動的運動方程式為

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = m\frac{d^2[x(t) - x_1]}{dt^2} \approx -a_1[x(t) - x_1]$$

因為只有正弦與餘弦函數，他們的微分，正比於他們自己的負值，故由觀察法可得

$$x(t) - x_1 = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

where $\omega^2 = a_1/m$ 。常數C_1 and C_2 需要由初始條件來決定。

附錄一、各種常見的一維運動與受力情形

	運動方程式（Equations of motion）	Initial conditions & Solutions
1	$\frac{dx}{dt}=v_x$ $m\frac{dv_x}{dt}=-kx$	$x(t=0)=x_0,\ \ v_x(t=0)=v_0$ $x(t)=$ $v_x(t)=$
2	$\frac{dx}{dt}=v_x$ $m\frac{dv_x}{dt}=-bv_x$	$x(t=0)=x_0,\ \ v_x(t=0)=v_0$ $x(t)=$ $v_x(t)=$
3	$\frac{dx}{dt}=v_x$ $m\frac{dv_x}{dt}=-kx-bv_x$	$x(t=0)=x_0,\ \ v_x(t=0)=v_0$ $x(t)=$ $v_x(t)=$ 了解課本 50 頁 Figure 2-5 所講述內容
4	$\frac{dz}{dt}=v_z$ $m\frac{dv_z}{dt}=-mg$	$z(t=0)=h,\ \ v_z(t=0)=0$ $z(t)=$ $v_z(t)=$
5	$\frac{dz}{dt}=v_z$ $m\frac{dv_z}{dt}=-mg-bv_z$	$z(t=0)=h,\ \ v_z(t=0)=0$ $z(t)=$ $v_z(t)=$
6	一根彈簧，彈力常數k，兩端各連結一質點m_1 & m_2，請問這個系統的震盪與運動情形	

附錄二、證明 Stokes theorem

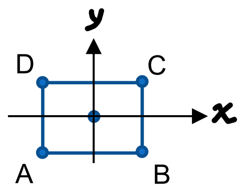
$$\oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(C)} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a}$$

其中$C(S)$ 表示包圍 曲面面積S 的封閉曲線 C 。反之，$S(C)$ 表示被封閉曲線 C所包圍的 曲面面積S。

Proof: 先將曲面面積S切割成很多微小方塊。考慮其中第i個小方塊，這個小方塊可近似一個「平面」。取此平面兩邊分別平行x軸與y軸，平面的法線方向平行z軸。小方平面ΔS_i沿x軸方向寬Δx，沿y軸方向寬Δy。令此小方平面中心座標為（$x, y, 0$）。則小方平面四個角的位置座標分別為（由左下角起，逆時針轉）

A:（$x-\frac{\Delta x}{2}, y-\frac{\Delta y}{2}, 0$）、B:（$x+\frac{\Delta x}{2}, y-\frac{\Delta y}{2}, 0$）、

C:（$x+\frac{\Delta x}{2}, y+\frac{\Delta y}{2}, 0$）、D:（$x-\frac{\Delta x}{2}, y+\frac{\Delta y}{2}, 0$）



根據中央差分法（Central finite-difference method）

$$\oint_{C_i(\Delta S_i)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy$$

$$\approx F_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, 0\right)\Delta x + F_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right)\Delta y - F_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, 0\right)\Delta x - F_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right)\Delta y$$

$$\approx \left[F_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, 0\right) - F_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, 0\right)\right]\Delta x + \left[F_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right) - F_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right)\right]\Delta y$$

$$\approx \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(-\frac{\left[F_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, 0\right) - F_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, 0\right)\right]}{\Delta y}\Delta x\Delta y + \frac{\left[F_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right) - F_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, 0\right)\right]}{\Delta x}\Delta x\Delta y \right)$$

$$\approx -\left.\frac{\partial F_x}{\partial y}\right|_{x,y,0}\Delta x\Delta y + \left.\frac{\partial F_y}{\partial x}\right|_{x,y,0}\Delta x\Delta y \approx \left(\nabla \times \vec{F}\right)_z (\Delta x\Delta y) \approx \iint_{\Delta S_i(C_i)} \left(\nabla \times \vec{F}\right)_z da_z$$

如此這般把每個小塊都加起來，則等號右邊積分和就是$\iint_{S(C)} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{a}$，等號左邊迴路相加時，相鄰的迴路，因為積分方向相反，所以都互相抵銷了，只剩最外圈的迴路積分。因此等號左邊迴路積分和為$\oint_{C(S)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$。（Q.E.D. 由此得證）