Chapter 9 補充教材: Action, Lagrangian, & Hamiltonian

前言

根據 **Calculus of Variations（變分法）**的維基百科說明[1]，整個故事剛開始原本只是學術圈大家一起想要解決一連串的數學物理難題。這些難題先後包括了：

Newton's minimal resistance problem (in1685-1687) [2]

這個問題是牛頓在 1685 年提出的，目標是要找出 什麼樣的轉動固體外型曲線，放在與轉軸平行的水中前進時，受到最小的阻力。

The brachistochrone curve （最速降曲線）problem (1696) [3]

這個問題是 Johann Bernoulli (1696) 提出的，目標要找出什麼樣的曲線，能讓落下來的質點最快到達終點。

在求解的過程中，很多人都曾努力去找解答，並對整個理論架構，有不同程度的貢獻。然而其中貢獻最大的人是 Euler，也是他將這個領域定名為 Calculus of variations（變分法）。當 Euler 看到 19 歲年輕的 Lagrange 的解答，他決定放棄自己的幾何解法，決定採用 Lagrange 所提出的純解析解法。並且協助 Lagrange 一起完成了 Euler–Lagrange equation。更有趣的是，他們最後發現，根據牛頓定律：「動量隨時間的變化等於物體所受的力」所寫出的微分方程式，居然與 「找出物體的運動軌跡使作用量最小」（minimum action）所得到的微分方程式一樣。這項發現讓日後的物理學家，可以從另一個角度來看物理問題。不再局限於「動量」與「力」這些傳統的物理概念。對日後的量子力學發展，有很大的幫助。

本補充教材首先將介紹一個新的物理概念 Action (作用量)[4]，再用 the least action (最小作用量)[5] 當成一個範例，簡單介紹一下變分法。然後，再拿幾個簡單範例說明，如果選對了 Lagrangian 的函數形式，就可以用 Euler–Lagrange equations 來取代原有的運動方程式。最後我們也將簡單的總結一下 Lagrangian mechanics and Hamiltonian mechanics 之間的關係與差異。

---

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_minimal_resistance_problem
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Action_(physics)
[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action

9.1. Action

Action （作用量）的單位是能量乘以時間、或是動量乘以長度、或是角動量乘以角度。就像日常生活中的很多經驗一樣，例如，我們短跑時，衝刺速度很快，動量很大，但是跑 100 公尺就累了。當我們長跑時，我們會慢慢跑，動量小，這樣才能跑很長的距離。早期某雜誌常舉辦訂閱讀者抽獎，得獎者可以選擇一次領取獎金，或分多年慢慢的少量領取，因此，讀者領到的獎金的總額，通常會接近一個定植。

若$\vec{p}$ 為一個廣義動量，$\vec{q}$ 為一個廣義坐標（位置），則 Action J 可以表示為

$$J = \int \vec{p} \cdot d\vec{q} \tag{1}$$

也可定義 Lagrangian $L = T - V$，其中 T 為動能， V 為位能，則 Action J 可以表示為

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{2}$$

若為保守力，則 $T + V = E_0 = \text{constant}$。於是 $L = T - (E_0 - T) = -E_0 + 2T$，故(2) 式可改寫為

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = -E_0(t_2 - t_1) + 2\int_{t_1}^{t_2} T dt \tag{3}$$

因此 action 是一個能量乘以時間的物理量。

如果整個運動，是由幾個不同時間尺度的準週期運動所組合而成的，則針對不同時間尺度的準週期的運動，我們可以定義該時間尺度的 Action J_k 如下

$$J_k = \oint p_k \cdot dq_k \tag{4}$$

如果影響準週期運動的外在因素變化很慢，則對應的 action 通常會是一個穩定的值（不變量）。一個有名的例子：有一回資深物理學家 Fermi 在一個研討會上，考大家一個難題。請問：透過一個圓環慢慢縮短一個單擺的擺長，什麼物理量不變？第二天，愛因斯坦順利的回答了這個問題：Action is conserved. 也就是單擺的擺動越來越快，但是擺動振幅也會越來越大！

未來大家在電漿物理導論的課程中，將會學到帶電粒子在磁偶極場中運動，會呈現三種不同時間尺度的週期運動。所以可以定義三種 actions。其中最快速的週期運動，就是繞著磁場打轉的迴旋運動，它所對應的 action 將「正比於」迴旋運動所產生的 magnetic moment （磁矩）的大小。因此磁矩守恆，就是一種 action 守恆的表現。值得注意的是，在電流片附近，磁矩 magnetic moment 通常不守恆。

9.2. The Least Action & Calculus of Variations (Euler–Lagrange equations)

考慮一個簡單的問題，如果動能 $T = T(q, \dot{q})$，位能 $V = V(q, t)$ ，其中 廣義位置（座標）函數 $q = q(t)$, 廣義速度函數 $\dot{q} = \frac{dq(t)}{dt}$。因此 Lagrangian $L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$，於是 action

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{5}$$

的大小，會隨著 $q(t)$ 函數的不同而改變。希望找一個 $q(t)$函數，能讓方程式(5)的積分結果有極值，極大值或極小值。由方程式(3)可知，這個值應該是極小值，因為如果是極大值，則表示選取不同的$q(t)$ 函數，可能讓動能對時間的積分變成「負值」，這是不合理的現象，因爲動能是一個大於等於零的數值。因此我們希望找一個 $q(t)$函數，能讓方程式(5)的積分結果有極值，一定是極小值。

變分法就是教我們如何找 能讓方程式(5)的積分結果有極小值的 $q(t)$ 函數。想法如下：

考慮將$q(t)$改寫為正確答案$q_T(t)$加上任意一個擾動函數$\eta(t)$乘以參數ϵ，i.e., $q(t) = q_T(t) + \epsilon\eta(t)$。這個任意擾動函數唯一需要滿足的條件就是在積分上下限時為零。i.e., $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$。因此 Action 變成

$$J(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_T + \epsilon\eta, \dot{q_T} + \epsilon\dot{\eta}, t)\, dt \tag{6}$$

我們希望 $J(\epsilon)$ 在 $\epsilon = 0$ 時，有極值。故得

$$0 = \left.\frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{d\epsilon} L(q_T + \epsilon\eta, \dot{q}_T + \epsilon\dot{\eta}, t)\right]_{\epsilon=0} dt \tag{7}$$

其中

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} L(q_T + \epsilon\eta, \dot{q}_T + \epsilon\dot{\eta}, t)\right]_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{d\epsilon}\right]_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right]_{\epsilon=0} \tag{8}$$

因為

$$\frac{d}{dt}\left(\eta\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta} + \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \tag{9}$$

Substituting Equation (9) into Equation (8) to eliminate $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}$, it yields

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} L(q_T + \epsilon\eta, \dot{q}_T + \epsilon\dot{\eta}, t)\right]_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{d}{dt}\left(\eta\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]_{\epsilon=0} \tag{10}$$

Substituting Equation (10) into Equation (7), it yields

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q}\eta + \frac{d}{dt}\left(\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \eta \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]_{\epsilon=0} dt & \\
= \left[\eta \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]_{\epsilon=0} dt & \\
= \int_{t_1}^{t_2} \eta \left[\frac{\partial L}{\partial q_T} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_T}\right)\right] dt &
\end{aligned}
\tag{11}
$$

由於$\eta(t)$為任意函數，因此要(11)式成立的唯一條件就是

$$
\frac{\partial L}{\partial q_T} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_T}\right) = 0 \tag{12}
$$

滿足(12)式的函數q_T就是能讓方程式(5)的積分結果有極小值的函數。方程式(12) 就是變分法所求得的 Euler–Lagrange equation。

9.3. Lagrangian mechanics [6]

如果廣義坐標與廣義速度不止一組，有N組，則

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_N, t)$$

我們也會得到N組 Lagrange equations

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_N} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_N}\right) = 0$$

每一組 Lagrange equation 都將是一個二階的 ordinary differential equation (O.D.E.)

請自行舉例說明並練習

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_mechanics

9.4. Hamiltonian mechanics[7]

有時候，我們不喜歡解 N 組 second-order O.D.Es.。我們更喜歡解 2N 組 first-order O.D.Es. 這時 Hamiltonian 就很好用了。

$$H = T + V$$

$$H = \sum_{k=1}^{N} p_k \dot{q}_k - L$$

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N, t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\dot{p}_1 \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} = \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\dot{p}_2 \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = \dot{q}_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_N} = -\dot{p}_N \quad \frac{\partial H}{\partial p_N} = \dot{q}_N$$

and

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

請自行舉例說明並練習

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_mechanics