前言

勞倫茲轉換 Lorentz Transformations 是讓愛因斯坦提出狹義相對論理論的基石。自從 Maxwell 在安培定律上，加上了位移電流這一項，完成了 Maxwell's equations 後，人類的科學，向前邁進了一大步。現在所有的電磁波通訊，都是 Maxwell's equations 的成果。

然而，科學家發現，若利用傳統的運動座標轉換：伽利略轉換 Galilean transformations，分析電磁波的色散關係(dispersion relation)，會發現：相對光源靜止的觀測者與相對光源等速運動的觀測者（觀測者速度大小遠小於光速），會因為光波色散關係(dispersion relation) 的改變，而看到不同的光。這與我們的日常生活經驗不符。因此有兩位學者 Voigt 與 Lorentz 不約而同地希望找到一個運動座標轉換方式，能讓相對光源靜止的觀測者與相對光源等速運動的觀測者（觀測者速度大小遠小於光速），看到相同的光波色散關係(dispersion relation)。Lorentz 因為多考慮了沿著$+\hat{x}$ 與 $-\hat{x}$ 方向的轉換必須得到一致的結果，因此成功找到了正確的 勞倫茲轉換 Lorentz Transformations，也為狹義相對論理論奠定了鞏固的基石。

A.1. Voigt Transformations

補充講義 8.6 節中，方程式(8)~(11) 是有名的電磁波波動方程式，它們都長得像

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

的形式。補充講義 8.3 節中，介紹怎麼求此波動方程式的解，以及它的物理意義。重點是，因為這個方程式看起來如此對稱。也就是說，如果考慮一個新變數 $w = ct$ 則 方程式(1) 可以改寫為

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial w^2} = 0 \tag{2}$$

所以如果考慮由一個慣性系轉到另一個慣性系，此電磁波方程式的長樣都相同，則 x 與 ct 的轉換應該相同。

Engelhardt (2018) 這篇文章[1] 介紹，Voigt 在 1887 年，首先提出如果選用 傳統的運動座標轉換 Galilean transformations （primed frame 相對 unprimed frame 以v 的速度向 x 方向移動）

$$x' = x - vt \tag{3}$$
$$t' = t \tag{4}$$

無法讓 方程式(1) 在 primed frame 維持原來 unprimed frame 的面貌（詳情請看 Engelhardt (2018) 這篇文章[1] 裡的介紹，在此不再贅述），所以他找出了一個新的 **Voigt transformations**

$$x' = x - vt \tag{5}$$

$$t' = t - vx/c^2 \tag{6}$$

可以讓 方程式(1) 在 primed frame 維持原來 unprimed frame 的面貌。Engelhardt (2018) 這篇文章 [1] 並沒有說明 Voigt 是怎麼想出這樣的 運動座標轉換，在此我們來猜測一下 Voigt 當初可能是怎麼想法的。

為了要讓轉換對稱，我們來猜測將方程式(6)改寫為以下的形式

$$ct' = ct - ax \tag{7}$$

或

$$t' = t - ax/c \tag{8}$$

也就是說 除了 x' 是 x 與 t 的函數， t' 也是 x 與 t 的函數。Namely, $x' = x'(x,t)$ and $t' = t'(x,t)$ 。現在考慮以下兩個二階偏微分表示式

$$\frac{\partial^2 A[x'(x,t),t'(x,t)]}{\partial x^2} \ \& \ \frac{\partial^2 A[x'(x,t),t'(x,t)]}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A[x'(x,t),t'(x,t)]}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial A}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial A}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} \\
&= \left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x'}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right\} \\
&+ \left\{\frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial t'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial t'}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right\} \\
&+ \left\{\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial x'}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\right\} \\
&+ \left\{\left(\frac{\partial A}{\partial t'}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

There was a typo in this equation. Thanks for the correction from Mr. Chung-Lin Tseng on Feb. 14, 2023.

Since

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) = 0$$

it yields

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) \tag{9}$$

Likewise,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \tag{10}$$

Substituting Equations (9) and (10) into Equation (1) to eliminate respectively the $\partial^2 A/\partial x^2$ and $\partial^2 A/\partial t^2$, it yields

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2\right] \\ + 2\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)\right] = 0\end{aligned} \tag{11}$$

Let us define

$$P = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 \tag{12}$$

$$Q = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 \tag{13}$$

$$R = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \tag{14}$$

Equation (11) can be rewritten as

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2}P - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}Q + 2\frac{\partial^2 A}{\partial t'\partial x'}R = 0 \tag{15}$$

因此為了要讓 wave equation 在 primed frame 維持原來 unprimed frame 的面貌, $P, Q, \& R$ 必須滿足以下關係式

$$P = Q \tag{16}$$

$$R = 0 \tag{17}$$

If we choose transformation Equations (5) and (8), then we have

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -v$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -a/c$$

Thus,

$$P = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \tag{18}$$

$$Q = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 = 1 - a^2 \tag{19}$$

$$R = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right) = -\frac{a}{c} + \frac{v}{c^2} \tag{20}$$

For

$$R = -\frac{a}{c} + \frac{v}{c^2} = 0$$

It yields

$$a = v/c \tag{21}$$

Substituting Equation (21) into Equation (19), it also yields $P = Q$.

因此 $a = v/c$ 能使 wave equation 在 primed frame 維持原來 unprimed frame 的面貌。將 $a = v/c$代回方程式(8) 得到

$$t' = t - \frac{ax}{c} = t - \frac{vx}{c^2}$$

這「可能」就是 Voigt transformation 方程式(5) and (6) 的由來。

A.2. Lorentz Transformations

一般相信，Lorentz 在推導 Lorentz transformations 前，並沒有看過 Voigt 的文章（各位要知道一百多年前資訊非常不發達），他應該也是由以上想法，導出了一個類似的關係式。但是，Lorentz 顯然比較仔細，他發現如果 primed frame 相對 unprimed frame 以v 的速度向 x 方向移動，轉換式是方程式(5) & (6):

$$x' = x - vt$$
$$t' = t - vx/c^2$$

則 unprimed frame 相對 primed frame 以$-v$ 的速度向 x 方向移動就應該得到

$$x = x' + vt' \tag{22}$$
$$t = t' + vx'/c^2 \tag{23}$$

但是直接解方程式(5) & (6)得到的結果是:

Equation (5)+v × Equation (6), it yields

$$x' + vt' = x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{24}$$

(v/c^2) ×Equation (5)+ Equation (6), it yields

$$\frac{vx'}{c^2} + t' = t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{25}$$

顯然地，方程式(24)不同於方程式(22), 方程式(25)也不同於方程式(23), 所以這個轉換有問題。接著，他發現，方程式(5) and (8)的轉換式前面，同乘上任何一個常數 γ，也就是

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{26}$$
$$t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \tag{27}$$

則方程式(18)~(20) 變成

$$P = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{28}$$

$$Q = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)^2 = \gamma^2(1-a^2) \tag{29}$$

$$R = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \gamma^2\left(-\frac{a}{c}+\frac{v}{c^2}\right) \tag{30}$$

則 $a = v/c$ 還是能讓 $P, Q, \& R$ 滿足方程式(16) & (17)。

至於要怎麼決定這個常數γ 是何物，我猜 Lorentz 的想法可能如下：

用新的轉換式推估 unprimed frame 相對 primed frame 以$-v$ 的速度向 x 方向移動應該得到

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{31}$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{32}$$

但若用新的轉換式直接解$x(x',t')$ and $t(x',t')$ 得到

Equation (26)+v × Equation (27), it yields

$$x' + vt' = \gamma x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{33}$$

(v/c^2) ×Equation (26)+ Equation (27), it yields

$$\frac{vx'}{c^2} + t' = \gamma t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{34}$$

Substituting Equation (33) into Equation (31) to eliminate $x' + vt'$, it yields

$$x = \gamma^2 x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{35}$$

Likewise, substituting Equation (34) into Equation (32) to eliminate $t' + vx'/c^2$, it yields

$$t = \gamma^2 t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{36}$$

Thus, we have

$$\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

Or

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{37}$$

where γ is called the *Lorentz factor*. The *Lorentz transformation*s are the Equations (26) & (27).

由於開根號裡的數值必須為正，且 γ 不可趨近於無窮大，所以愛因斯坦由 Lorentz transformations 得到了以下的靈感：光速應該是有質量物質的速度極限。要讓粒子的速度不因為受力而持續增加，讓物質的動量隨 $\gamma m\vec{v}$ 而改變，就是再好不過的方法了。當然，這並不是得到 $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ 的理由。但是 $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ 確實使得 $v < c$ 這個條件被滿足。

References

[1] Engelhardt, W. (2018), On the origin of the Lorentz transformation, *Ijsrm. Human, Vol. 9 (4): 159-167.* https://arxiv.org/pdf/1303.5309.pdf