前言

力學課本[1]第八章利用弦波、聲波、電磁波，三種波動來介紹波動力學（Wave Mechanics）。自然界中，除了電磁波，可以在真空中傳播外，其他所有的波動，都需要靠「連續體」的介質，波動才能夠傳播。因此課本也利用這個機會，簡單介紹了一下「連續體」（continuous medium）的一些特性。

上述提及的三種波動中，弦波與電磁波都是橫波。只有聲波是一種縱波，也是一種壓縮波或疏密波。因為聲波在介質中傳播時，介質的密度與壓力，都會發生變化，因此在介紹聲波時，必須介紹流體方程式，包括連續方程式 continuity equation (8-127)、動量方程式 momentum equation (8-139)、能量方程式 energy equation (8-184)。由於這部分的內容，實際牽扯的範圍非常廣，通常是半學期的課程，因此不容易在短短的幾小時的課程中，詳細的介紹，因此授課老師需要斟酌情形，決定要教得多深入。原則上，各位同學可以在流體力學、電漿物理導論課程（大三）、或太空電漿物理課程（碩一），學到這些基本方程式的由來。至於課本的推導，並不是唯一的推導方式，但是仍值得大家參考。我本人喜歡從統計熱力學之 Boltzmann equation or collisionless Vlasov equation 開始推導[2]，因此所得到的動量方程式，類似課本第十章的動量方程式 (10-173)。因為由統計熱力學所推導出來的動量方程式與能量方程式，要做一些簡化的假設，才能化簡成第八章的動量方程式 (8-139)與能量方程式 (8-184)，因此這份補充教材，將不會對連續方程式 (8-127)、動量方程式 (8-139)、能量方程式 (8-184)，做太多的討論。這份補充教材，將先針對連續體、波動、波動方程式，做通盤的介紹，再針對弦波、聲波、電磁波，作重點的整理與講解。

8.1. 連續體簡介

連續體通常由大量的粒子所組成，而且這些粒子之間必須具有集體效應(collective behavior). 所謂集體效應，就像一個社會中，每一個人的行為舉止與成就或失敗，都會直接或間接的影響這個社會中其他的人。例如，一堆彈簧掛在一起，彼此可以任意地做上下震盪，就不能視為一個連續體。可是一堆的彈簧掛在一起，彼此之間有其他彈簧或金屬弦或木桿相連，這時任一彈簧的震盪，都會拉扯、牽引、直接或間接影響四周彈簧的震盪，這時，這樣一個彈簧系統就是一個連續體。日常生活中，常見的連續體，包括（一）固態形式的連續體，例如：吉他弦、鼓面、又例如阿拉斯加發生地震時，在非常空曠的地方，可以看到地面呈現波動般的起伏。（二）液態形式的連續體，例如：海洋、石油、血液。（三）氣態形式的連續體，例如：地表的大氣、天然氣。（四）電漿態形式的連續體，例如：火、太陽這樣的恆星 (star)電漿、星系 (galaxy) 形成前的吸積盤 (accretion disk)電漿、電離層電漿、太

[1] Symon, Keith R., *Mechanics,* 2nd.ed., Addison-Wesley, London, 1960.
[2] Lyu, , Ling-Hsiao (2014), *Elementary Space Plasma Physics Second Edition*, Airiti Press, Taiwan, R.O.C.

陽風 (solar wind) 這樣的恆星風 (star wind) 電漿。大多數連續體中的粒子，是藉由碰撞 (collisions) 來交換彼此的動量與能量。可是太空電漿，如太陽風，因為密度太低，碰撞不夠頻繁，因此主要是藉由帶電粒子運動產生電流再造成長距離的磁力，以及帶電粒子切割磁場運動所產生的電力來交換彼此的動量與能量。所以地球科學院四個領域：太空、大氣、水海、地物，研究的都是連續體的問題。其他領域，如工學院的土木、機械，也需要研究連續體的問題。

連續體具有單一質點所沒有的一些特性，例如： 密度 (density) 、溫度 (temperature) 、壓力或壓強 (pressure) 。以下簡單說明這三種連續體的特性。

密度(density) 包括 弦的線質量密度（因次：M/L）、鼓皮的面質量密度（因次：M/L^2）、木塊或氣團的質量密度（因次：M/L^3）、以及電漿中帶正、負電荷的粒子的個數密度(number density, 因次：$1/L^3$)、電荷密度 (charge density, 因次：Q/L^3)、以及質量密度 (mass density , 因次：M/L^3)。

溫度 (temperature) 是連續體內能（熱）的一種表現。連續體內能等於連續體的總動能扣除連續體整體運動動能後，因為連續體中的粒子相對質心運動或振動所帶的動能。溫度的因次為 ML^2/T^2 ，與能量相同。因此描述電漿的溫度時，有時會用 eV (electron Volts)。如果用絕對溫度 K 來描是連續體的溫度，則需要乘以 Boltzmann constant 才得到以 Joule 為單位的能量大小。

Pressure 嚴格地說，其實是一種對稱的二階張量 (second-rank tensor 詳見第十章的介紹)。此對稱的二階張量，共有六個獨立分量，每個分量對應兩個方向。我們知道，向量（一階張量）有三個分量，每個分量對應一個方向。向量的每個分量大小，會隨著所選取的座標軸不同而異。可是向量的長度，不會隨所選取的座標軸不同而異。同樣的，對稱的二階張量的「行列式值」(determinant) 與「對角線和」(trace) 也不會隨所選取的座標軸不同而異。Since an isotropic pressure tensor can be written as

$$\vec{\vec{P}} = p\vec{\vec{1}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

因此科學家將 (isotropic or anisotropic) pressure tensor 的「對角線和」除以 3 之後的結果，定義為一種純量的 pressure (scalar pressure)。純量的 pressure 正比於是連續體的內能密度。二階張量形式的 pressure tensor，正比於連續體粒子熱運動所造成的動量在特定面上的通量。 我們也可以從 pressure 的因次為 M/LT^2 看出來，pressure 是一種能量密度（純量）、或動量密度的通量（是兩種向量的平行積 dyad product，也就是一個二階張量）。因此，將 pressure 翻譯做「壓力」其實並不恰當，因為 pressure 的因次與「力」(force) 的因次 ML/T^2 或 body force 的因次 M/L^2T^2 都不相同，其中 body force 為連續體 單位體積所受的力。

8.2. 波動簡介

構成波動的要素有哪些？

- 是振幅嗎？是頻率嗎？一根彈簧的振盪，一根單擺的振盪，也有振幅，也有頻率。但是我們不會稱它是波動。所以振幅與頻率並非構成波動的必要條件。
- 是波長嗎？各位如果聽過孤波(soliton)，例如，長江的洪峰，地震造成的海嘯、船首的 bow wave (艏波)、或如影片[3]所製作出來的孤波，都只有單單一個隆起，所以不能定義波長（通常定義波長為：波峰到波峰之間的距離、或波谷到波谷之間的距離）。我們最多只能免強定義它的特徵尺度或寬度。所以波長並非構成波動的必要條件。
- 相位 Phase 或許才是構成波動的要素。如果相位的變化，非常有規律，這樣的波動就是訊號 (signal) 否則就是雜訊 (noise)，因此要了解波動，就先要了解與「波動相位」 相關的描述。

Wave Characteristics （說明以下物理量的定義或意義）

- 相位 phase：一個訊號擾動特有的變化情形，例如，一個正弦波，其相位從 0 到 2π，有不同的變化情形，但是 0 與 2π 的相位卻是相同的。因此是一個具有週期性的訊號。
- 波前 wave front ： 相鄰且具有相同相位之點的連線或連面
- 相速度 phase velocity：方向與「波前」垂直，大小等於擾動波移動速度在此方向上的投影分量。
- 群速度 group velocity：擾動波能量移動的速度。例如，冬季的冷鋒鋒面，其相速度可能是朝向東南方向，但是它實際移動的方向（群速度）卻是可能朝向東方、甚至東北方。
- 縱波 longitudinal waves ： 介質的速度向量擾動量平行或反平行於相速度方向
- 橫波 transverse waves ： 介質的速度向量擾動量垂直於相速度方向
- 混合波 hybrid waves ： 當介質的速度向量擾動量同時具有平行或反平行於相速度方向得分量，也具有垂直於相速度方向得分量時，我們稱這樣的波動是混合波。

如果有人問你，什麼是波動？用定性的文字來說明，非常冗長費事。比較簡單的說法是，滿足「波動方程式」的現象，就是波動。但是你知道，什麼是 wave equation 呢？

[3] https://www.youtube.com/watch?v=SknvLa8qEu0

8.3. 波動方程式

大二的應用數學（物理系稱為物數、工學院稱為工數）會介紹三種基本的二階偏微分方程式（The 2nd-order partial differential equations），如 Table 8.1 所列。

Table 8.1. The 2nd-order Partial Differential Equations

二階偏微分方程式	對應之二次曲線方程式
2-D Poisson equation $\frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x,y)}{\partial y^2} = 1$	elliptic equation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
1-D diffusion equation $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$	parabolic equation $y = 4ax^2$
1-D wave equation $\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0$	hyperbolic equation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Laplace equation $\nabla^2 \Phi\,(\vec{r}) = 0$ & Poisson equation $\nabla^2 \Phi\,(\vec{r}) = f(\vec{r})$ are elliptic partial differential equations of second order.
- Diffusion equation is a parabolic partial differential equation of second order.
$$\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\vec{r},t)$$
- Wave equation is a hyperbolic partial differential equation of second order.
$$\nabla^2 A(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(\vec{r},t)}{\partial t^2} = S(\vec{r},t)$$
- 因為橢圓是一個封閉的曲線，因此要解 Laplace equation or Poisson equation，需要提供函數的一個封閉的「邊界條件」。
- 因為拋物線是一個半封閉的曲線，因此要解 diffusion equation （擴散方程式）需要提供函數初始的空間分佈與邊界條件。
- 因為 Diffusion Equation 這個方程式的解，一部分受到邊界條件的支配，同時也會隨時間，逐漸將$\nabla^2 T(\vec{r},t)$的數值變小。因此，科學家有時會利用解 Diffusion Equation 來找出，滿足 Laplace equation $\nabla^2 T(\vec{r}) = 0$ 的解。
- 我們通常利用數值模擬 求 diffusion equation （擴散方程式）與 wave equation （波動方程式） 的解 。但是如果波速 c 是一個常數，我們還是可以得到 1-D wave equation 的解析解(analytical solutions)。
- 因為雙曲線是一組開放的曲線，因此要求 1-D wave equation 的解析解，我們通常只需要提供函數一組空間分佈與加一組邊界條件即可。

  以下就簡單介紹，如何求得 1-D wave equation 的解析解。

Analytical Solutions of the One-Dimensional Wave Equation

Let us consider the following 1-D wave equation

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

Since

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right] A(x,t)$$

Equation (1) yields

$$\left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right] = 0 \tag{2}$$

Or

$$\left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right] = 0 \tag{3}$$

One can show that $A(x-ct)$ is the solution of Equation (2).

Proof:
Substituting $A(x,t) = A(x-ct)$ into Eq. (2), it yields

$$\frac{\partial A(x-ct)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A(x-ct)}{\partial t} = \frac{dA(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{dA(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}$$
$$= \frac{dA(x-ct)}{d(x-ct)}\,1 + \frac{1}{c}\frac{dA(x-ct)}{d(x-ct)}(-c) = 0$$

Likewise, $A(x+ct)$ is the solution of Eq. (3). Thus, solution of the wave equation (1) can be written as a linear combination of $F(x-ct)$ and $R(x+ct)$, that is,

$$A(x,t) = F(x-ct) + R(x+ct)$$

Table 8.2 總結波動方程式（1）之解析解。

Table 8.2. Summary of 1-D wave equation and its solutions

一個二階偏微分方程式 $\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0$ 可以降階為兩個一階偏微分方程式:	analytical solutions $A(x,t) = F(x-ct) + R(x+ct)$
$\left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right] = 0$	analytical solution $A(x,t) = A(x-ct)$
$\left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right] = 0$	analytical solution $A(x,t) = A(x+ct)$

波動方程式進階教材

How do we know that $A(x-ct)$ is the solution of Eq. (2)?

本來 $A(x,t)$ 是兩個獨立變數 (x,t) 的函數，現在多了一個條件 Eq. (2) 就會讓獨立變數的數量減少一個。也就是說，我們可以找到一組新的獨立變數 $[\xi(x,t),\eta(x,t)]$ 使得 A 只是 ξ 的函數，而不是 η 的函數，也就是說

$$\left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\xi=\text{const.}} = 0 \tag{4}$$

"若 $\xi(x,t)$ and $\eta(x,t)$ 的反函數存在"（這個條件很重要，因為有時不成立），則可將 x and t 寫成是 (ξ,η) 的函數，也就是 $x(\xi,\eta)$ and $t(\xi,\eta)$. 因此 Eq. (4) 可改寫為

$$\left.\frac{\partial A[x(\xi,\eta),t(\xi,\eta)]}{\partial \eta}\right|_{\xi} = \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_t \left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{\xi} + \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_x \left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\xi} = 0 \tag{5}$$

比較 Eq. (5) 與 Eq. (2) 中 $\partial A/\partial x$ and $\partial A/\partial t$ 的係數

$$\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_t \left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{\xi} + \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_x \left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\xi} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

可得

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|_{\xi} = 1 \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\xi} = \frac{1}{c} \tag{7}$$

Eq. (7) can be rewritten as

$$\left.\frac{\partial ct}{\partial \eta}\right|_{\xi} = 1 \tag{8}$$

Subtracting Eq. (8) from Eq. (6), it yields

$$\left.\frac{\partial (x-ct)}{\partial \eta}\right|_{\xi} = 0 \tag{9}$$

Eq. (9) yields, $x-ct$ is a function of ξ. The simplest solution is

$$x-ct=\xi(x,t)$$

Thus, the solution of Eq. (2) is $A(x,t)=A[\xi(x,t)]=A(x-ct)$.

Likewise, the solution of Eq. (3) is $A(x,t)=A(x+ct)$.

The characteristic curves of the Eq. (2) are

$$\xi(x,t)=x-ct=\text{constant curves}$$

We can show that the phase of the perturbation is constant along a constant $\xi(x,t)$.

Figure 8.1 sketches the propagation of an initial disturbance based on Eq. (2). The amplitude of the disturbance is constant along each characteristic curve $\xi=x-ct$. The disturbance propagates toward $+x$ direction at a speed c.

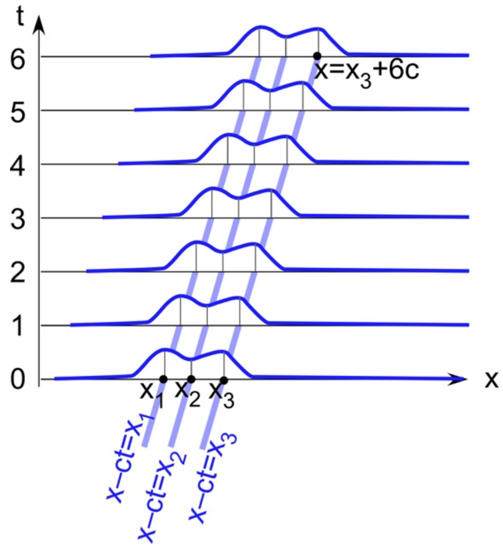

Figure 8.1. A sketch of the propagation of an initial disturbance based on Eq. (2). The amplitude of the disturbance is constant along each characteristic curve $\xi = x - ct$. The disturbance propagates toward $+x$ direction at a speed c.

8.4. 弦波

考慮水平面x-y平面上，一條沿x方向繃緊的弦。用手朝y方向撥弦。弦上會有橫波，朝$\pm x$方向傳播。弦上每一小段的弦Δl，在y方向的位移不同，所受到y方向的淨「張力」（Tension Force）也不同。

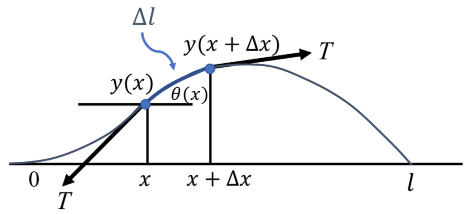

Figure 8.2. The vibrating string

如圖 8.2，一小段弦「左側」受到「向左下方拉」的張力，其y方向的分量為 $-T\sin[\theta(x,t)]$
這一小段弦「右側」會受到「向右上方拉」的張力，其y方向的分量為 $+T\sin[\theta(x+\Delta x,t)]$
其中$\theta(x,t)$為在(x,t)時空位置處，弦與x軸的夾角。如果弦的張力很強，則弦的振動振幅通常不會很大（遠小於圖 8.1 所顯示的振幅）。若 $\theta(x,t) \ll 1$，則我們可以近似得到

$$\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta) \approx \theta \approx \lim_{\theta\to 0}(\tan\theta)$$

因此 $\sin[\theta(x,t)]$ 可近似為弦在此處的斜率$\tan[\theta(x,t)] = [\partial y(x,t)/\partial x]_{(x,t)}$ 。因此這一小段弦所受到y方向的淨張力為

$$T\sin[\theta(x+\Delta x,t)] - T\sin[\theta(x,t)] \approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

若弦的線質量密度為ρ，則這一小段弦的質量為$\rho\,\Delta l$。因為$\theta(x,t)\to 0$ 因此$\Delta x = \Delta l\cos\theta \approx \Delta l$
也因此這一小段弦的質量可近似為$\rho\,\Delta x$。又，這一小段弦在y方向的加速度為 $\partial^2 y/\partial t^2$。根據牛頓第二定律，這一小段弦的受力與加速度情形應滿足

$$(\rho\,\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]$$

或

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right]}{(\rho\,\Delta x)}$$

For $\Delta x \to 0$, 上式可改寫為

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

也就是說，弦上每一點的 $y = y(x,t)$ 滿足以下方程式

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = C^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

因此，根據波動方程式，此弦波的波速應為

$$C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

8.5. 聲波 Sound wave

氣體的連續方程式 continuity equation 為

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\rho=-\rho\,\nabla\cdot\vec{V} \tag{1}$$

氣體的動量方程式 momentum equation 為

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=-\nabla p+\rho\vec{g}+\text{阻尼項} \tag{2}$$

其中，$\rho, p, \vec{V}$ 分別為氣體密度、壓力、與平均速度。由於地表聲波中，壓力梯度力遠強於重力，故可以忽略重力項。為了簡化問題起見，我們進一步忽略阻尼項，因此氣體的動量方程式可改寫為

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\approx-\nabla p \tag{3}$$

因為聲波是一種快速壓縮波，因此是一種絕熱過程，因此氣體的能量方程式 energy equation 可寫為

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)p=-\gamma p\,\nabla\cdot\vec{V} \tag{4}$$

其中 γ 為比熱比 ratio of specific heat ($\gamma=c_p/c_v=(f+2)/f$ where f is the degree of freedom)。由於聲波中$\nabla\cdot\vec{V}\neq 0$，因此由方程式(1)&(4) 得狀態方程式(equation of state)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)p=\frac{\gamma p}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\right)\rho \tag{5}$$

假設背景是一個均勻的平衡態，$\rho_0, p_0, \vec{V}_0$ 分別為平衡態的氣體密度、壓力、與平均速度。因為平均速度是一定值，我們可以選取一個 moving frame, such that $\vec{V}_0=0$ 。 假設$\delta\rho$, δp, $\delta\vec{V}$ 分別為氣體密度、壓力、與平均速度的小擾動態。也就是說，我們令

$$\rho=\rho_0+\delta\rho$$
$$p=p_0+\delta p$$
$$\vec{V}=\delta\vec{V}$$

若$\delta\rho\ll\rho_0$, $\delta p\ll p_0$, $|\delta\vec{V}|\ll\sqrt{p_0/\rho_0}$，我們可以將方程式 (1), (3), (4), (5) 線性化(linearize) 得到線性化的連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho=-\rho_0\,\nabla\cdot(\delta\vec{V}) \tag{6}$$

線性化的動量方程式

$$\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{V}\approx-\nabla(\delta p) \tag{7}$$

線性化的能量方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta p=-\gamma p_0\,\nabla\cdot(\delta\vec{V}) \tag{8}$$

線性化的狀態方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta p=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho \tag{9}$$

or

$$\delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\,\delta\rho \tag{9a}$$

$\nabla \cdot$ Eq. (7) yields

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \left(\delta\vec{V}\right)\right] \approx -\nabla^2(\delta p) \tag{10}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ Eq. (8) yields

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta p = -\gamma p_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \left(\delta\vec{V}\right)\right] \tag{11}$$

Substituting Eq. (10) into Eq. (11) to eliminate $\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \left(\delta\vec{V}\right)\right]$, it yields

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta p = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\,\nabla^2(\delta p) \tag{12}$$

Likewise, $\frac{\partial}{\partial t}$ Eq. (6) yields

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho = -\rho_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \left(\delta\vec{V}\right)\right] \tag{13}$$

Substituting Eq. (10) into Eq. (13) to eliminate $\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \cdot \left(\delta\vec{V}\right)\right]$, it yields

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho = \nabla^2(\delta p) \tag{14}$$

Substituting Eq. (9a) into Eq. (14), it yields

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\rho = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\nabla^2(\delta\rho) \tag{15}$$

方程式 (12) & (15) 顯示壓力擾動量δp與密度擾動量$\delta\rho$ 都滿足一聲波的波動方程式。此聲波波動方程式所對應的聲波波速大小為

$$C_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \tag{16}$$

而方程式(9a) 則顯示

$$\frac{\delta p}{\delta\rho} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = C_S^2 \tag{17}$$

在結束這節的討論前，我們簡單利用動量方程式討論一下**伯努利定律的適用範圍**。首先因為

$$\vec{V} \times \left(\nabla \times \vec{V}\right) = -\vec{V} \cdot \nabla\vec{V} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) \tag{18}$$

Substituting Eq. (18) into Eq. (3) to eliminate $\vec{V} \cdot \nabla\vec{V}$, it yields

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} - \rho\vec{V} \times \left(\nabla \times \vec{V}\right) + \rho\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\nabla p \tag{19}$$

由 Eq. (19) 可以看出，要得到伯努利定律（Bernoulli theorem）

$$\nabla\left(\frac{\rho V^2}{2} + p\right) = 0 \tag{20}$$

我們必須假設 (i) 一個不可壓縮的（或 沒有壓縮的）過程 ($\rho = \mathrm{constant}$), (ii) steady flow ($\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} = 0$), (iii) irrotational flow ($\nabla \times \vec{V} = 0$)。因此小尺度的渦流或亂流，易造成小飛機失事！

8.6. 真空中的電磁波 Electromagnetic Wave Equation in Vacuum

We can derive the electromagnetic wave equation in vacuum from the following Maxwell's equations in vacuum

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{4}$$

where c is the light speed. The curl of Equation (3) yields

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial\left(\nabla \times \vec{B}\right)}{\partial t} \tag{5}$$

Substituting Equation (1) into Equation (5) to eliminate $\nabla \cdot \vec{E}$ and substituting Equation (4) into Equation (5) to eliminate $\nabla \times \vec{B}$, it yields the wave equation of the electric field in vacuum,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

Likewise, the curl of Equation (4) yields the wave equation of the magnetic field in vacuum,

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

For simplicity, let us consider a plane wave, where $\nabla = \hat{x}\partial/\partial x$ only. i.e., $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$. Equations (6) and (7) yield

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

and Equations (1) and (2) yield $E_x = 0$ and $B_x = 0$.