Motion of a Particle in a Two- or Three-Dimensional System

PART-C

Ling-Hsiao Lyu

Department of Space Science and Engineering

National Central University

Symon (1960): Chapter 3: Motion of a Particle in Two or Three Dimensions

“二元”或 “三元”「聯立的」 微分方程式 (System ODEs)

Part 4:

3-13 Motion under a central force

3-15 Elliptic orbits. The Kepler problem

行星公轉軌道 數值模擬 Numerical Simulation

3-14 The central force inversely proportional to the square of the distance （**解析**解 **Analytical** solutions）

3-16 Hyperbolic orbits. The Rutherford problem. Scattering cross section （不教了，請自行研讀，可作為期末報告）

Kepler 行星運動定律 （觀測結果）

(1) The planets move in ellipses with the sun at one focus.

行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓

(2) Areas swept out by the radius vector from the sun to a planet in equal times are equal.

單位時間內，行星與太陽連線掃過的面積相同

(3) The square of the period of revolution is proportional to the cube of the semimajor axis.

$(\text{行星公轉週期})^2$ 正比於 $(\text{行星公轉橢圓軌道半長軸長})^3$

Motion under a central force

可解釋

單位時間內，行星與太陽連線掃過的面積相同

柱面座標（at $z = 0$），或行星公轉平面的極座標 運動方程式

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta = 0$$

其中，F_r and F_θ 的形式，是牛頓猜的。接下來要檢查一下，看看這樣的猜想，是否能得到和 Kepler 行星運動定律一樣的結果。先看最簡單的「單位時間內，行星與太陽連線掃過的面積相同」，it yields

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \Delta\theta} \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = r\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{2} r^2 \ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(\text{constant}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r(2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

因為行星與太陽的距離 r 不為零，故$2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$ 此 與 $F_\theta = 0$ 的猜想相符

Motion under a central force
角動量守恆

柱面座標（at $z=0$），或行星公轉的 運動方程式

$$ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

$$ma_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta = 0$$

$F_\theta = 0$ 則角動量 L_z 守恆，因為 $F_\theta = 0 \Rightarrow \vec{F} = \hat{r}F_r$ 在此「中心力」作用下

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \hat{z}\frac{dL_z}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = (\hat{r}r)\times(\hat{r}F_r) = 0$$

故角動量 L_z 守恆，依照定義

$$\vec{L} = \hat{z}L_z = \vec{r}\times m\vec{v} = m(\hat{r}r)\times\left(\hat{r}\dot{r} + \hat{\theta}r\dot{\theta}\right) = \hat{z}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$

故

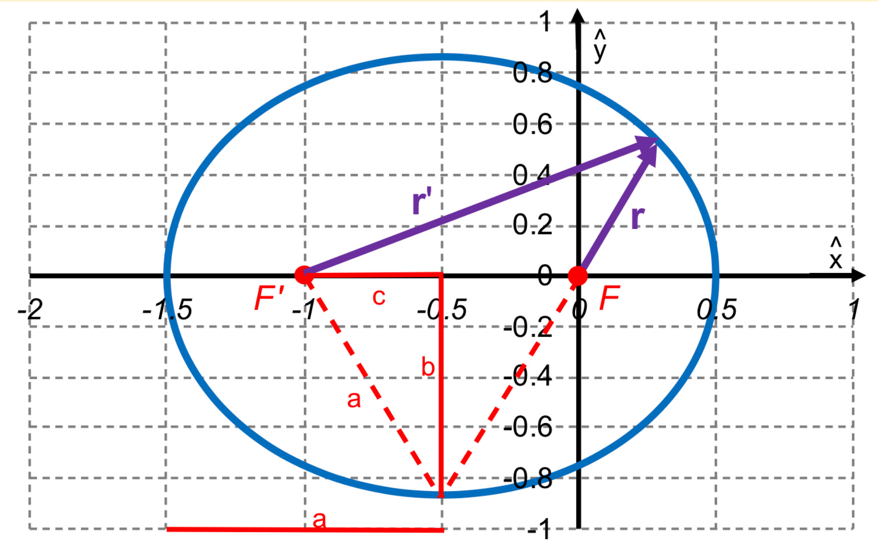
$$L_z = mr^2\dot{\theta} = \text{constant} = \left(2m\frac{dA}{dt}\right)$$

後面求橢圓軌道時，我們將考慮 $\dot{\theta}$ 是 r 的函數，也就是 $\dot{\theta} = L_z/mr^2$

The central force inversely proportional to the square of the distance

(& 行星的動能＋重力位能 不足以逃脫太陽重力束縛)，可解釋
行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓

要驗證這個現象，我們先要知道橢圓的以一個焦點為原點的極座標方程式



一個離心率為0.5的橢圓 (c =0.5 a)

$\vec{r}' = 2c\hat{x} + \vec{r} = 2\epsilon a\hat{x} + (r\cos\theta\ \hat{x} + r\sin\theta\ \hat{y})$

Since for an ellipse

$|\vec{r}'| + |\vec{r}| = 2a$

It yields

$|\vec{r}'|^2 = (2a - r)^2$

That is

$(r\cos\theta + 2\epsilon a)^2 + (r\sin\theta)^2 = (2a - r)^2$

$\Rightarrow r^2 + 4\epsilon ar\cos\theta + 4\epsilon^2 a^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$

$\Rightarrow r(1 + \epsilon\cos\theta) = a(1 - \epsilon^2)$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{(1+\epsilon\cos\theta)}$$

The central force inversely proportional to the square of the distance

(& 行星的動能＋重力位能 不足以逃脫太陽重力束縛)，可解釋 **行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓**

橢圓以一個焦點為原點的極座標方程式為

$$r(\theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$$

$r(\theta = 0) = r_{min}$ perigee 近日點
$r(\theta = \pi) = r_{max}$ apogee 遠日點

此橢圓極座標方程式所滿足的ODE 可藉由變數變換簡單的算出來。首先令
$u = 1/r$ 則

$$u(\theta) = \frac{1+\epsilon\cos\theta}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$\Rightarrow\ a(1-\epsilon^2)u(\theta) = 1+\epsilon\cos\theta$$

$$\Rightarrow a(1-\epsilon^2)u(\theta) - 1 = \epsilon\cos\theta$$

$$\Rightarrow a(1-\epsilon^2)\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = -\epsilon\cos\theta = 1 - a(1-\epsilon^2)u(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} - u(\theta)$$

🡐This is an ODE of $u(\theta)$

The central force inversely proportional to the square of the distance

(& 行星的動能+重力位能 不足以逃脫太陽重力束縛)，可解釋
行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓

Since

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \Rightarrow u(\theta)r(\theta) = 1 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\{\ln[u(\theta)r(\theta)]\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u'}{u} + \frac{r'}{r} = 0 \Rightarrow u' = -\frac{r'}{r}u = -\frac{r'}{r^2} \Rightarrow u'' = -\frac{r''}{r^2} + \frac{2r'r'}{r^3}$$

where $u' = du(\theta)/d\theta$ and $r' = dr(\theta)/d\theta.$ The ODE of $u(\theta)$

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} - u(\theta)$$

can be rewritten as

$$u'' + u = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} \Rightarrow -\frac{r''}{r^2} + \frac{2r'r'}{r^3} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r^3}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2 + \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2r}{d\theta^2} + \frac{2}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2 + r = \frac{r^2}{a(1-\epsilon^2)}$$

不透過以上計算，你看得出來嗎？

←ODE of $r(\theta) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta}$

The central force inversely proportional to the square of the distance

(& 行星的動能＋重力位能 不足以逃脫太陽重力束縛)，可解釋
行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓

$$m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)=F_r=-\frac{GMm}{r^2}\ (1)\qquad \dot{\theta}=\frac{L_z}{mr^2}\ (2)$$

希望由這兩道式子找出 $r[\theta(t)]$ 所滿足的ODE 與前面的 橢圓方程式所滿足的ODE 相似。首先

$$\ddot{r}=\frac{d^2}{dt^2}\{r[\theta(t)]\}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{dr[\theta(t)]}{dt}\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{dr[\theta(t)]}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right\}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{d\theta}\frac{L_z}{mr^2}\right\}=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{dr}{d\theta}\frac{L_z}{mr^2}\right\}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{dr}{d\theta}\frac{L_z}{mr^2}\right\}\frac{L_z}{mr^2}$$

$$=\frac{d^2r}{d\theta^2}\left[\frac{L_z}{mr^2}\right]^2-2\left\{\frac{dr}{d\theta}\frac{L_z}{mr^3}\frac{dr}{d\theta}\right\}\frac{L_z}{mr^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\left[\dot{\theta}\right]^2-2\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2\right\}\left[\dot{\theta}\right]^2$$

$$\Rightarrow \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\left\{\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{1}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2-r\right\}\dot{\theta}^2=\left\{\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{1}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2-r\right\}\left[\frac{L_z}{mr^2}\right]^2=-\frac{GM}{r^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2r}{d\theta^2}+\frac{2}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2+r=\frac{GM}{r^2}\frac{m^2r^4}{L_z^2}=\frac{GMm^2r^2}{L_z^2}$$

← ODE of $r(\theta)$ 滿足(1) & (2) 式

The central force inversely proportional to the square of the distance

(& 行星的動能＋重力位能 不足以逃脫太陽重力束縛)，可解釋
行星的公轉軌道是一個以太陽為一個焦點的橢圓

比較 橢圓極座標方程式所求出的 ODE of $r(\theta)$

$$-\frac{d^2r}{d\theta^2}+\frac{2}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2+r=\frac{r^2}{a(1-\epsilon^2)}$$

以及萬有引力運動方程式所求出的 ODE of $r(\theta)$

$$-\frac{d^2r}{d\theta^2}+\frac{2}{r}\left[\frac{dr}{d\theta}\right]^2+r=\frac{GM}{r^2}\frac{m^2r^4}{L_z^2}=\frac{GMm^2r^2}{L_z^2}$$

比較以上這兩式，可知 依照萬有引力運動的行星角動量L_z 與 軌道離心率 ϵ 、半長軸長 a 、以及太陽質量M 、行星質量m之間的關係為

$$\frac{1}{a(1-\epsilon^2)}=\frac{GMm^2}{L_z^2}\Rightarrow L_z=\sqrt{GMm^2a(1-\epsilon^2)}$$

Exercise 1:
行星公轉軌道 數值模擬
Numerical Simulations Study of the Planetary Orbits

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dfrac{L_z^2}{m^2 r^3} - \dfrac{GM}{r^2} \\ \dfrac{L_z}{mr^2} \end{bmatrix}$$

建議選取近日點 perigee 或 遠日點 apogee 為模擬的初始點，因為這兩點 $\dot{r} = 0$。

perigee	apogee
$r = a - c = a(1-\epsilon)$ $\dot{r} = 0$ $\theta = 0$ $L_z = \sqrt{GMm^2(1-\epsilon^2)a}$	$r = a + c = a(1+\epsilon)$ $\dot{r} = 0$ $\theta = \pi$ $L_z = \sqrt{GMm^2(1-\epsilon^2)a}$

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解
Analytical Solutions

萬有引力運動方程式

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r=-\frac{GMm}{r^2} \qquad \& \qquad \dot{\theta}=\frac{L_z}{mr^2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}-mr\left[\frac{L_z}{mr^2}\right]^2=-\frac{GMm}{r^2}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}=\frac{L_z^2}{mr^3}-\frac{GMm}{r^2}$$

因為上式右側只是一個單純 r 的函數，因此 可以將上式想成是一個一維的運動方程式。這個一維的運動是在一個虛擬的「有效位能場 $'V'(r)$」中進行，也就是

$$m\ddot{r}=-\frac{d'V'(r)}{dr}$$

比較上下兩式可得

$$\frac{d'V'(r)}{dr}=\frac{GMm}{r^2}-\frac{L_z^2}{mr^3}$$

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solutions

上頁得到「有效位能場 $'V'(r)$」滿足以下方程式

$$\frac{d'V'(r)}{dr} = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L_z^2}{mr^3}$$

積分得

$$'V'(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + 'V'(r \to -\infty)$$

取 $'V'(r \to -\infty) = 0$ 可得

$$'V'(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2}$$

其中 $-GMm/r$ 是重力位能， $L_z^2\ /2mr^2 = L_z^2/2I$ 是行星公轉角動量所對應的動能

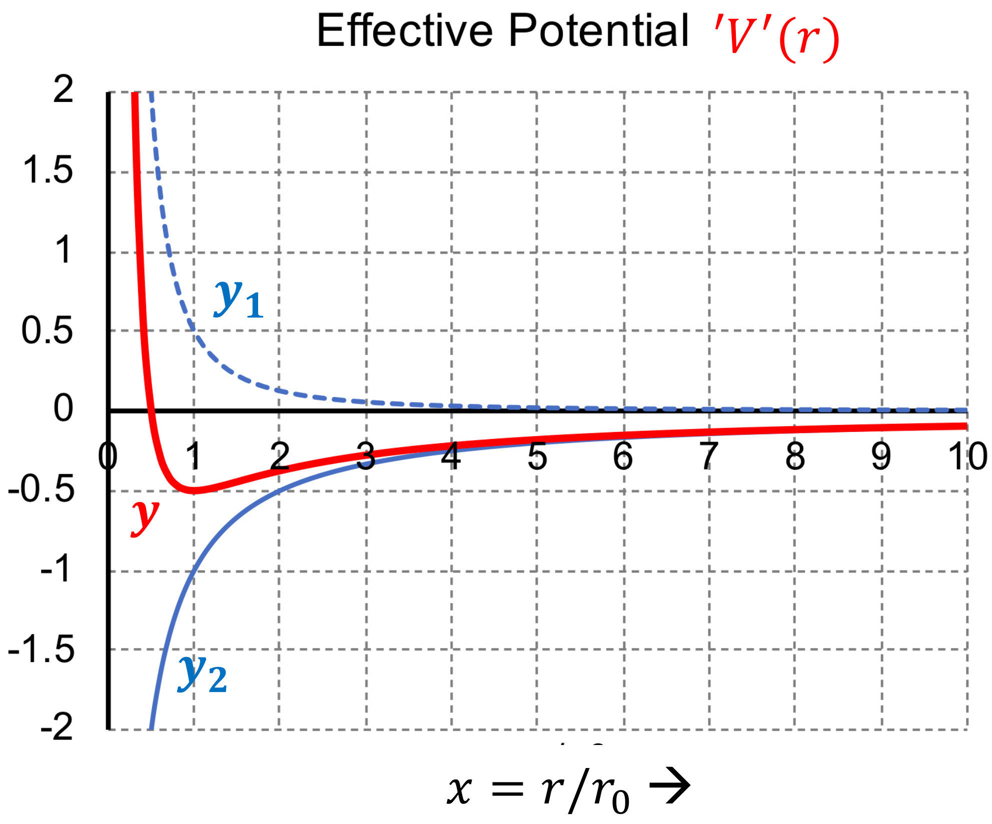
所以，只要畫出 $'V'(r)$ 的圖形，就可以大致估算 $r(t)$ 解的形式

提示：非相對論的動能表示式：

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L_z^2}{2I}$$

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solutions



$$'V'(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

圖中橫軸為歸一化的(normalized)徑向長度 $x = r/r_0$，我們取有效位能最低點的徑向位置 r_0 為橫軸的單位長度。我們取 $GMm/r_0 = L_z^2/mr_0^2$ 為縱軸的單位能量。

圖中藍色虛線為歸一化的行星公轉角速度所對應的動能

$$y_1(x) = (L_z^2/2mr^2)/(L_z^2/mr_0^2) = 1/2x^2$$

藍色實線為歸一化的行星重力位能

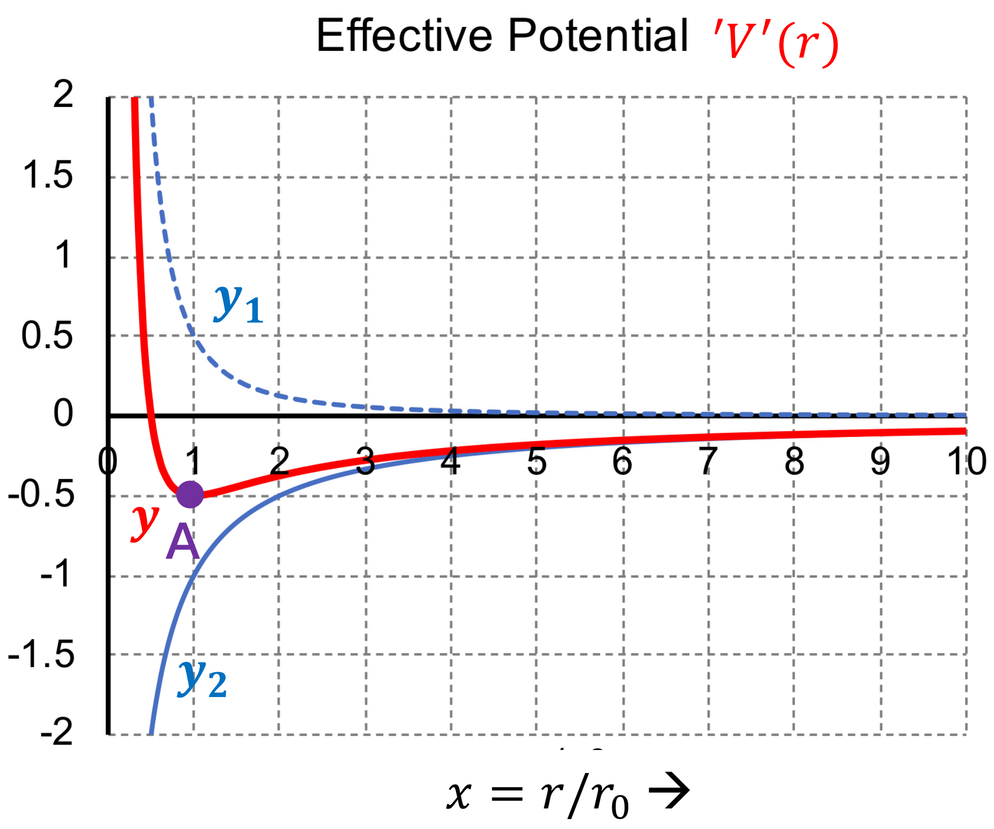
$$y_2(x) = (-GMm/r)/(GMm/r_0) = -1/x$$

將藍色虛線與藍色實線的數值相加，可以得到紅色曲線的數值。
紅色曲線為歸一化的有效位能

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{'V'(r)}{\frac{GMm}{r_0}} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$$

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solution (A) 正圓軌道



$$'V'(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

紅色曲線為歸一化的有效位能

其中 $r = r_0$ 時 $GMm/r_0 = L_z^2/mr_0^2$

因為行星或彗星軌道與太陽的距離 滿足以下方程式

$$m\ddot{r} = -\frac{d'V'(r)}{dr} = \frac{L_z^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}$$

當數值模擬時，若所選取的初始條件除了滿足 $v_r = \dot{r} = 0$，也滿足重力等於瞬間離心力

$$m\frac{GM}{r^2} = m\frac{v_\theta^2}{r} = m\frac{\dot{\theta}^2}{r} = m\frac{(L_z/mr)^2}{r} = \frac{L_z^2}{mr^3}$$

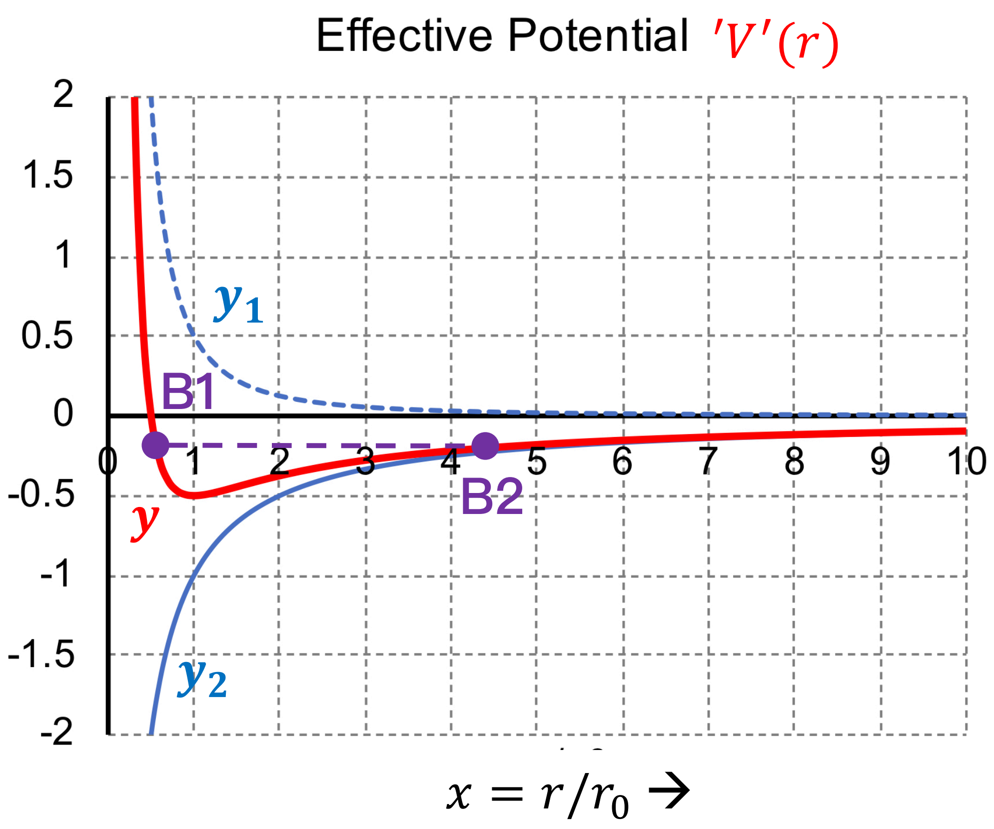
則 $\ddot{r} = 0$。這將使 $\dot{r}$ 持續為零。因此會是一個正圓的軌跡。以上條件也可改寫為

$$\frac{L_z^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = 0$$

可見這點位在 $r = r_0$ 處。也就是圖中的A點。此處位在有效位能最低點， $d'V'(r)/dr = 0$ 因此 $\ddot{r} = 0$。

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solutions (B1,B2) 橢圓軌道



$$'V'(r)=\frac{L_z^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

紅色曲線為歸一化的有效位能

其中 $r=r_0$ 時 $GMm/r_0=L_z^2/mr_0^2$

因為行星或彗星軌道與太陽的距離 滿足以下方程式

$$m\ddot{r}=-\frac{d'V'(r)}{dr}=\frac{L_z^2}{mr^3}-\frac{GMm}{r^2}$$

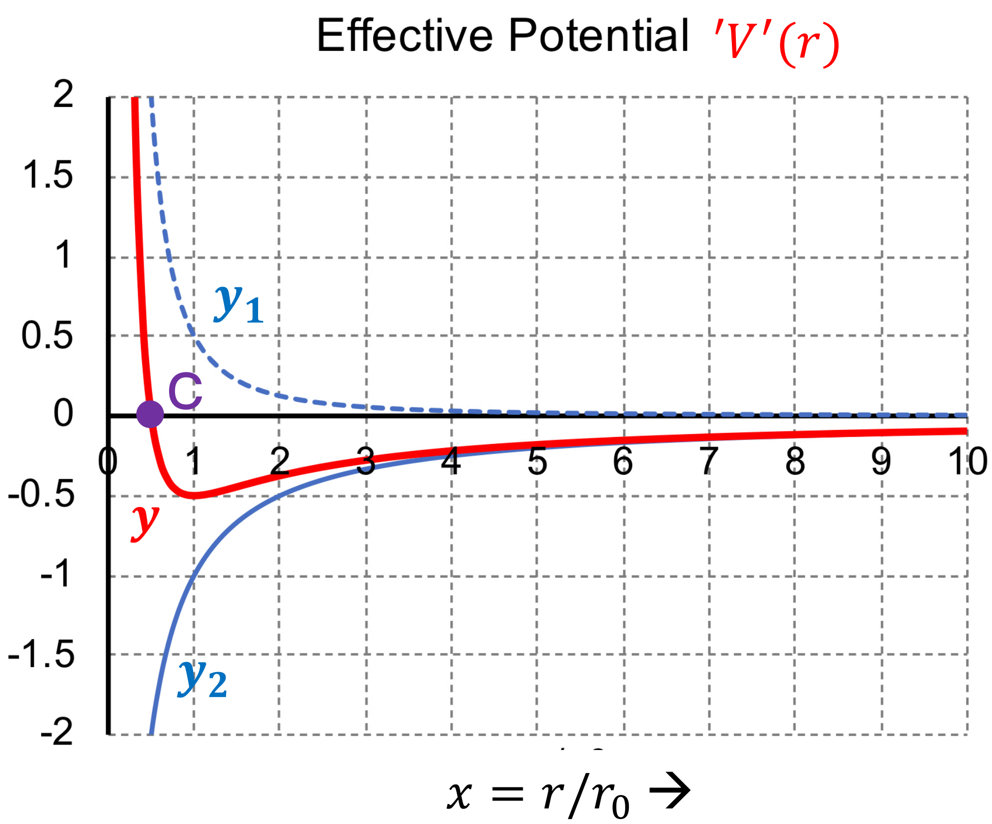
當數值模擬時，若所選取的初始條件除了滿足 $v_r=\dot{r}=0$，也滿足重力小於瞬間離心力，但是瞬間動能還是無法脫離重力位能的束縛

$$m\frac{GM}{r^2}<m\frac{v_\theta^2}{r}=\frac{L_z^2}{mr^3}<2m\frac{GM}{r^2}$$

則 $\ddot{r}>0$。這將使 $\dot{r}$ 與 r 都開始增加。因此得到一個由近日點B1 開始運行的橢圓軌道。假想一個虛擬粒子，會在近日點B1與遠日點B2之間來回運動。我們當然也可以由遠日點B2開始模擬此橢圓軌道運動。在遠日點B2處，重力大於瞬間離心力，使得 $\ddot{r}<0$。這將使 $\dot{r}$ 與 r 都開始減少。

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solution (C) 拋物線軌道



$$'V'(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

紅色曲線為歸一化的有效位能

其中 $r = r_0$ 時 $GMm/r_0 = L_z^2/mr_0^2$

因為行星或彗星軌道與太陽的距離 滿足以下方程式

$$m\ddot{r} = -\frac{d'V'(r)}{dr} = \frac{L_z^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}$$

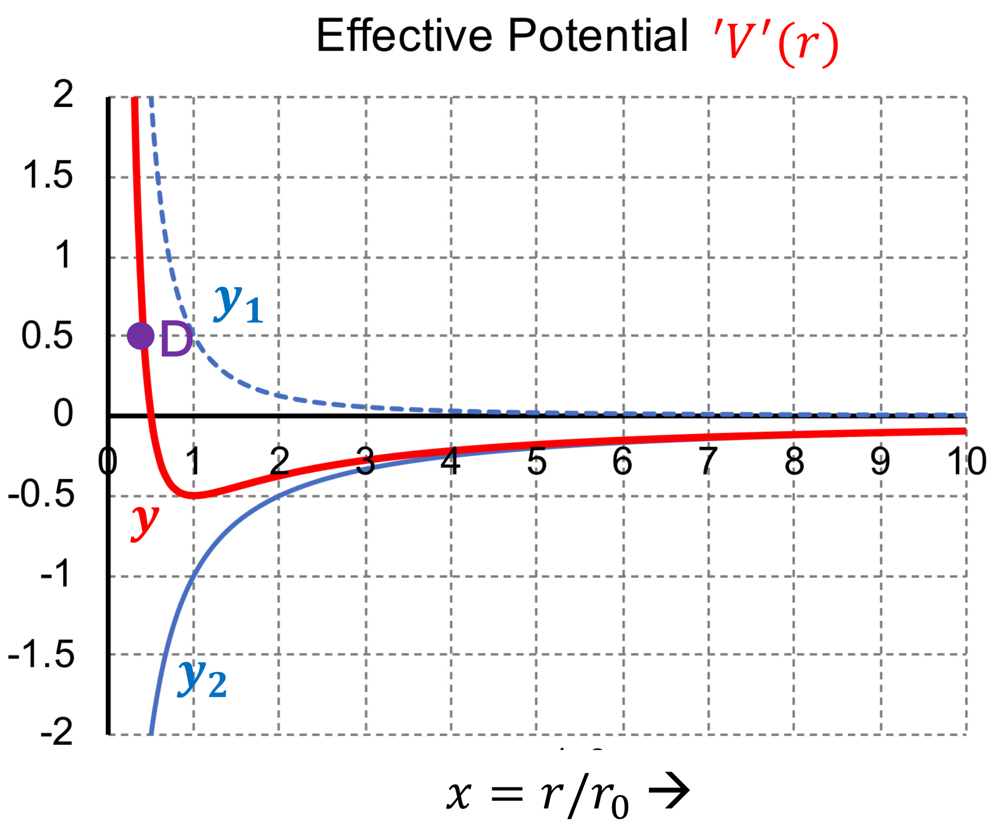
當數值模擬時，若所選取的初始條件除了滿足 $v_r = \dot{r} = 0$，也滿足單純 v_θ 所貢獻的 動能 就可以抵抗重力引力的位能，也就是 動能 等於重力引力位能的絕對值（取無窮遠處重力位能為零）

$$\frac{L_z^2}{2mr^2} = \frac{GMm}{r}$$

則 $'V'(r) = 0$。因此虛擬粒子，會從近日點 C 以拋物線軌道，跑去無窮遠處，在無窮遠處速度接近零。

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解

Analytical Solution (D) 雙曲線軌道



$$'V'(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

紅色曲線為歸一化的有效位能

其中 $r = r_0$ 時 $GMm/r_0 = L_z^2/mr_0^2$

因為行星或彗星軌道與太陽的距離 滿足以下方程式

$$m\ddot{r} = -\frac{d'V'(r)}{dr} = \frac{L_z^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}$$

當數值模擬時，若所選取的初始條件除了滿足 $v_r = \dot{r} = 0$，也滿足單純 v_θ 所貢獻的 動能大於重力引力位能的絕對值（取無窮遠處重力位能為零）

$$\frac{L_z^2}{2mr^2} > \frac{GMm}{r}$$

則 $'V'(r) > 0$。因此虛擬粒子，會從近日點 D 以雙曲線軌道，跑去無窮遠處。

當中心力的大小與距離平方成反比時，可用有效位能函數分析所有可能的 解析解 Analytical Solutions

初始徑向速率	初始公轉轉動動能	軌道特性 & 模擬初始位置
$v_r = 0$	$\frac{mv_\theta^2}{2} < \frac{GMm}{2r}$	橢圓 & 遠日點
$v_r = 0$	$\frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{GMm}{2r}$	正圓
$v_r = 0$	$\frac{GMm}{2r} < \frac{mv_\theta^2}{2} < \frac{GMm}{r}$	橢圓 & 近日點
$v_r = 0$	$\frac{mv_\theta^2}{2} = \frac{GMm}{r}$	拋物線 & 近日點
$v_r = 0$	$\frac{GMm}{r} < \frac{mv_\theta^2}{2}$	雙曲線 & 近日點

Exercise 2: 數值模擬驗證以上結果

Hyperbolic orbits.
The Rutherford problem & Scattering cross section

上課時間不夠了，這一小節，請自行研讀，不詳細教了！
這小節的內容，可以作為各位的期末報告。