

Let the “row” ( 列 ) denote 橫向的一排

Let the “column” ( 行 ) denote 縱向的一排

怎麼記？用象形文字的方式記憶。柱子越多的，就是縱向的！

Let  $A_{ij}$  denote the element in the  $i$ -th row and the  $j$ -th column of the matrix  $A$ .

Let the matrix  $A^T$  denote the transport of the matrix  $A$ . (行列對換的「反置矩陣」)

Then,  $(A^T)_{ij} = A_{ji}$  is the element in the  $i$ -th row and the  $j$ -th column of matrix  $A^T$ .

Let  $\bar{A}_{ij}$  be the complex conjugate of  $A_{ij}$ .

Let the matrix  $A^H = \bar{A}^T$  denote the Hermitian of the matrix  $A$ .

Then  $(A^H)_{ij} = \bar{A}_{ji}$  is the element in the  $i$ -th row and the  $j$ -th column of matrix  $A^H$ .

It can be shown that  $(AB)^T = B^T A^T$  and  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .

記憶口訣：先穿襪子再穿鞋子，先脫鞋子再脫襪子。

By definition:

- A matrix  $A$  is a symmetric matrix (對稱矩陣) if  $A_{ij} = A_{ji}$ .  
A matrix  $A$  is a symmetric matrix (對稱矩陣) if  $A = A^T$ .
- A matrix  $A$  is an antisymmetric matrix (反對稱矩陣) if  $A_{ij} = -A_{ji}$ .  
A matrix  $A$  is an antisymmetric matrix (反對稱矩陣) if  $A = -A^T$ .
- A matrix  $A$  is a Hermitian matrix (self-adjoint matrix) if  $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ .  
A matrix  $A$  is a Hermitian matrix (self-adjoint matrix) if  $A = \bar{A}^T$ .
- A matrix  $A$  is a unitary matrix if  $A^{-1} = \bar{A}^T$  (i.e.,  $A\bar{A}^T = \vec{1}$ ).
- A real matrix  $A$  is an orthogonal matrix if  $A^{-1} = A^T$  (i.e.,  $AA^T = \vec{1}$ ).
- A real unitary matrix  $A$  is an orthogonal matrix.

An  $n \times n$  square matrix  $A$  can be a representation of a 2<sup>nd</sup>-rank tensor  $\vec{A}$  of a given set of bases  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n\}$  in an  $n$ -dimensional space, where  $A = [A_{ij}]$  and  $\vec{A} = \sum_i \sum_j [A_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j]$

The representations of the 2<sup>nd</sup>-rank tensors found in physics are either symmetric (if all the elements are real numbers) or Hermitian (if some of the elements are complex numbers).

所以，你們將來做物理相關研究時，除了要確認，一個方程式中，相加相減的每一項，因次都要一樣，都是純量、或都是向量、或都是二階張量 ( 2<sup>nd</sup>-rank tensor )，也要確保如果出現二階張量，一定是 Hermitian matrix (如果全是實數，就變成是 symmetric matrix)。這是初步檢查，所推導的方程式是否正確的第一步。

**Both the Hermitian matrix and the real-number symmetric matrix can be diagonalized and has real number eigen values.**

請證明：The eigenvalues of a Hermitian matrix are all real numbers

$$(1) \quad A = \bar{A}^T$$

$$(2) \quad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Taking complex conjugate and transpose of equation (2), it yields

$$(3) \quad \bar{\mathbf{x}}^T \bar{A}^T = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T$$

Substituting equation (1) into equation (3), it yields

$$(4) \quad \bar{\mathbf{x}}^T A = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T (2) \Rightarrow$$

$$(5) \quad \bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

Substituting equation (4) into equation (5), it yields

$$(6) \quad \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \lambda \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

Since  $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ , equation (6) yields  $\bar{\lambda} = \lambda$ . That is  $\lambda \in R$ .

請證明：The eigenvectors of a Hermitian matrix that corresponding to different eigenvalues are perpendicular to each other

$$(1) \quad A = \bar{A}^T$$

$$(2) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ and both of them are real numbers}$$

$$(3) \quad A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$$

$$(4) \quad A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$$

Taking complex conjugate and transpose of equation (4), it yields

$$(5) \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T \bar{A}^T = \lambda_2 \bar{\mathbf{x}}_2^T$$

Substituting equation (1) into equation (5), it yields

$$(6) \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T A = \lambda_2 \bar{\mathbf{x}}_2^T$$

$$\bar{\mathbf{x}}_2^T (3) \Rightarrow$$

$$(7) \quad \bar{\mathbf{x}}_2^T A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1$$

Substituting equation (6) into equation (7), it yields

$$(8) \quad \lambda_2 \bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = 0$$

Since  $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ , equation (8) yields  $\bar{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = 0$ . That is  $\mathbf{x}_2 \perp \mathbf{x}_1$

最後，我想要闡明一件很重要的事：**Matrix 不一定是張量**

先來看看什麼是張量 tensor？

- 張量是一種「物理量」。物理量，有單位，有因次，可用 LTMQ 來表示之。
- 「零階張量」zero-rank tensor，也就是純量 scalar。  
純量只有大小，「不具方向性」。  
例如質量 mass，它的因次是 M。
- 「一階張量」first-rank tensor，也就是向量 vector。  
向量有大小也有「一個方向」。  
例 1：速度 velocity，它的因次是 L/T，方向是前進方向。  
例 2：角速度 angular velocity，它的因次是 1/T，方向沿轉軸方向。  
給定一個基底 basis，向量在此基底中的表現可以是一個 3x1 的 column matrix 或者 1x3 的 row matrix。  
給不同的基底，同一個向量它的矩陣表示式內容不同。
- 「二階張量」second-rank tensor。  
二階張量有大小也有「兩個方向」。  
例 1：轉動慣量 moment of inertia，它的因次是 L<sup>2</sup>M，它的兩個方向：一個沿「所施力矩的方向」，一個沿「剛體的角加速度方向」。(或一個沿「轉動動量方向」，一個沿「角速度方向」。  
例 2：壓力張量 pressure tensor，它的因次是 M/LT<sup>2</sup>，它的兩個方向：一個沿「所施力的方向」，一個沿「受力面的方向」。  
例 3：電導率張量 electrical conductivity tensor，它的因次是 Q<sup>2</sup>T/ML<sup>3</sup>，它的兩個方向：一個沿「電場方向」，一個沿「電流密度方向」。  
給定一個基底 basis，二階張量在此基底中的表現可以寫成一個 3x3 的方矩陣 square matrix。  
給不同的基底，同一個二階張量它的矩陣表示式內容不同。

很多 Matrix 沒有單位，只是一個「操作子」operator，所以不能說它是一個「張量」

例如：座標轉換的 rotation matrix R，它沒有因次。

如果一個向量在基底 B 中的表現為 3x1 column matrix C，但是在基底 B' 中的表現為 3x1 column matrix C'。則我們可以找到一個 3x3 rotation matrix R such that C'=RC

前文提到，物理上，系統自然形成的二階張量，在一個座標系中的表現式，都是對稱的矩陣或 Hermitian matrix。例如轉動慣量與熱壓張量。

但是受外力影響所形成的張量，就不一定是對稱的矩陣。例如：不對稱的外力作用在一個物體上，所形成的 pressure tensor，「可能」就是一個不對稱的張量。又例如：中性風碰撞帶電粒子，在 E-region ionosphere (E-層電離層) 所形成的導電率張量 conductivity tensor，它在座標系中的表示式，就是一個對稱的矩陣與反對稱矩陣之和。因此整體就不是一個對稱的矩陣了。同理，一個外加電場，所對應的 dielectric tensor 的表示式也不一定是一個對稱矩陣。至於電磁波動所對應的 effective conductivity tensor and dielectric tensor 卻可能以 Hermitian matrix 呈現 (也就是反對稱項與對稱項差了±90 度的相位)。

### Examples

#### 1. 電離層中的導電率張量 $\vec{\sigma}$

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \sigma_p \vec{E}_{\perp} + \sigma_H \hat{B} \times \vec{E}$$

where

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \hat{B} \hat{B} \cdot \vec{E} \\ \vec{E}_{\perp} &= (\vec{1} - \hat{B} \hat{B}) \cdot \vec{E} \\ \hat{B} \times \vec{E} &= \vec{M}_{\hat{B} \times} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Thus

$$\vec{j} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} = \left[ \sigma_{\parallel} \hat{B} \hat{B} + \sigma_p (\vec{1} - \hat{B} \hat{B}) + \sigma_H \vec{M}_{\hat{B} \times} \right] \cdot \vec{E}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \sigma_{\parallel} \hat{B} \hat{B} + \sigma_p (\vec{1} - \hat{B} \hat{B}) + \sigma_H \vec{M}_{\hat{B} \times} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_x^2}{B^2} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_x B_y}{B^2} - \sigma_H \frac{B_z}{B} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_x B_z}{B^2} + \sigma_H \frac{B_y}{B} \\ (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_x B_y}{B^2} + \sigma_H \frac{B_z}{B} & \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_y^2}{B^2} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_y B_z}{B^2} - \sigma_H \frac{B_x}{B} \\ (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_x B_z}{B^2} - \sigma_H \frac{B_y}{B} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_y B_z}{B^2} + \sigma_H \frac{B_x}{B} & \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p) \frac{B_z^2}{B^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ , (i.e.,  $B_x = B_y = 0$ ) it yields

$$\vec{\sigma} = \sigma_{\parallel} \hat{B} \hat{B} + \sigma_p (\vec{1} - \hat{B} \hat{B}) + \sigma_H \vec{M}_{\hat{B} \times} = \begin{bmatrix} \sigma_p & -\sigma_H \frac{B_z}{B} & 0 \\ \sigma_H \frac{B_z}{B} & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix}$$

因此導電率張量 conductivity tensor，不是一個對稱的矩陣

2. 熱壓張量 thermal pressure tensor  $\vec{P}$ 

首先介紹 相空間 phase space  $(\vec{x}, \vec{v}) = \text{real space } (x, y, z) + \text{velocity space } (v_x, v_y, v_z)$

假設一氣體的相空間分佈密度函數為  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  ( 因次  $T^3/L^6$  ) · 則依照定義此氣體的

- 個數密度場 number density field 為 ( dimension 因次  $1/L^3$  )

$$n(\vec{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1)$$

- 質量密度場 mass density field 為 ( dimension 因次  $M/L^3$  )

$$\rho(\vec{x}, t) = mn(\vec{x}, t) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2)$$

- 流場 ( 平均速度場 ) flow field 為 ( dimension 因次  $L/T$  )

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v}{\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v}{n(\vec{x}, t)} \quad (3)$$

也可以說 the mass flux density 為

$$mn(\vec{x}, t)\vec{V}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)\vec{V}(\vec{x}, t) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (4)$$

- 熱壓張量場 thermal pressure tensor field 為 ( dimension 因次  $M(L/T)^2/L^3 = M/T^2L$  )

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)][\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (5)$$

也可以說 the momentum flux density 為

$$\rho(\vec{x}, t)\vec{V}(\vec{x}, t)\vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{P}(\vec{x}, t) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{v}\vec{v} f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (6)$$

- 熱壓場 ( 純量熱壓場 ) thermal pressure field 為 ( dimension 因次  $M/T^2L$  )

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \text{trace}[\vec{P}(\vec{x}, t)] = \frac{1}{3} m \iiint_{-\infty}^{\infty} [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] \cdot [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (7)$$

- Stress tensor field 為 ( dimension 因次  $M/T^2L$  )

$$\vec{\Pi}(\vec{x}, t) = \vec{P}(\vec{x}, t) - p(\vec{x}, t)\vec{1} \quad (8)$$

- 熱流張量場 heat flux tensor field 為 ( dimension 因次  $M/T^3$  )

$$\vec{Q}(\vec{x}, t) = m \iiint_{-\infty}^{\infty} [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)][\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)][\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (9)$$

- 熱流向量場 ( 通常簡稱熱流場 heat flux ) 為 ( dimension 因次  $M/T^3$  )

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} m \iiint_{-\infty}^{\infty} [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] \cdot [\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)][\vec{v} - \vec{V}(\vec{x}, t)] f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3v \quad (10)$$

流體方程式 ( Chapter 8 Fluid Equations 補充教材 )

我們可以由「相空間分佈密度函數」(Phase space density)  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  所滿足的波茲曼方程式 Boltzmann equation

$$\frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)}{m} \cdot \frac{\partial f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\delta f(\vec{x}, \vec{v}, t)}{\delta t} \right)_{collision} \quad (11)$$

其中  $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$  為一種 phase space 中的 Force field · 推導出

連續方程式 Continuity equation

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t)] \quad (12)$$

動量方程式 Momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t)] = -\nabla \cdot [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{P}(\vec{x}, t)] + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (13)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t)] = -\nabla \cdot [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) + p(\vec{x}, t) \vec{1} + \vec{\Pi}(\vec{x}, t)] + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (14)$$

其中  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  為一種 real space 中的 Force field ·

利用 Equation (12), Equation (14) 可化簡為

$$\rho(\vec{x}, t) \left[ \frac{\partial \vec{V}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \vec{V}(\vec{x}, t) \right] = -\nabla p(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \vec{\Pi}(\vec{x}, t) + \vec{F}(\vec{x}, t) \quad (15)$$

壓力方程式 Pressure equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{P}(\vec{x}, t)] \\ = -\nabla \cdot [\rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) + (\vec{P}\vec{V})^S + \vec{Q}(\vec{x}, t)] + (\vec{V}\vec{F})^S \end{aligned} \quad (16)$$

能量方程式 Energy equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{V}(\vec{x}, t) + \frac{3}{2} p(\vec{x}, t) \right] \\ = -\nabla \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} \rho(\vec{x}, t) \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{V}(\vec{x}, t) + \frac{3}{2} p(\vec{x}, t) \right] \vec{V}(\vec{x}, t) + \vec{P}(\vec{x}, t) \cdot \vec{V}(\vec{x}, t) \right. \\ \left. + \vec{q}(\vec{x}, t) \right\} + \vec{V} \cdot \vec{F} \end{aligned} \quad (17)$$

利用 Equations (12) & (15), Equation (17) 可化簡為

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial p(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \nabla p(\vec{x}, t) \right] \\ = -\frac{5}{2} p(\vec{x}, t) \nabla \cdot \vec{V}(\vec{x}, t) - \left[ \vec{\Pi}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \right] \cdot \vec{V}(\vec{x}, t) - \nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (18)$$

以上這些方程式中的變數 · 都只是  $(\vec{x}, t)$  的函數 · 比  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  的自由度少 ·

但是

- 要知道質量密度場  $\rho(\vec{x}, t)$  如何隨時間變化，要先知道質量密度場與平均速度場的空間分佈。
- 要知道平均速度場  $\vec{V}(\vec{x}, t)$  如何隨時間變化，要先知道密度場、平均速度場、熱壓場、Stress Tensor 與背景力場的空間分佈。
- 要知道熱壓場  $p(\vec{x}, t)$  如何隨時間變化，要先知道密度場、平均速度場、熱壓場、Stress Tensor、背景力場、以及熱流場的空間分佈。

同理要知道 Stress Tensor  $\vec{\Pi}(\vec{x}, t)$  以及熱流場  $\vec{q}(\vec{x}, t)$  如何隨時間變化，就要考慮更多方程式。若要用壓力方程式 Pressure equation (16) 來求  $\vec{\Pi}(\vec{x}, t)$ ，就需要先知道熱流張量場  $\vec{Q}(\vec{x}, t)$  的空間分佈。如此，沒完沒了！科學家為了要做一個「了斷」，通常就會對熱壓場、Stress Tensor  $\vec{\Pi}(\vec{x}, t)$ 、以及熱流場  $\vec{q}(\vec{x}, t)$  做了一些假設，假設他們是平均速度場的梯度函數，或是溫度梯度的函數。於是讓整個系統能有一個唯一解。只是，這些假設，在非線性物理過程中，不一定適用。

課本第十章，就根據熱壓張量的特性，介紹科學家如何「猜」熱壓張量與平均速度場梯度之間的關係。

由方程式(5), (7), (8) 可知  $\vec{P}$  是一個「對稱張量」，而 stress tensor  $\vec{\Pi}$  則是一個「對稱且對角線和為零的張量」，因此科學家猜出以下「對稱張量」

$$\nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^t$$

因為

$$\frac{1}{3}\text{trace} [\nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^t] = \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{V}$$

因此

$$\nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\vec{1}$$

就是一個「對稱且對角線和為零的張量」。故科學家令 stress tensor  $\vec{\Pi}$  可改寫為

$$\vec{\Pi} = -\eta \left[ \nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\vec{1} \right] \quad (19)$$

為何取負號，後面就真相大白了。

因此熱壓張量可改寫為

$$\vec{P} = p\vec{1} - \eta \left[ \nabla\vec{V} + (\nabla\vec{V})^t - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\vec{1} \right] \quad (20)$$

若  $\eta$  是常數，則 stress 梯度力可改寫為

$$-\nabla \cdot \vec{\Pi} = \eta \nabla \cdot \left[ \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^t - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{1} \right] = \left[ \eta \nabla^2 \vec{V} + \eta \left( 1 - \frac{2}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \right]$$

or

$$-\nabla \cdot \vec{\Pi} = \eta \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (21)$$

Equation (15) 就可改寫為

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{F} \quad (22)$$

其中

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$

就像一個擴算方程式 Diffusion equation，所以  $\eta \nabla^2 \vec{V}$  就是一個耗散項，會讓空間中的速度切變小（速度差異變小）。這就是為什麼 Equation (19) 中，科學家決定比例常數前面取負號而非正號。

同理，科學家也假設熱流正比於溫度梯度，方向與溫度梯度方向相反（熱流由高溫流向低溫），也就是

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \quad (23)$$

若  $\kappa$  為常數，則方程式(18)中的熱流項可改寫為

$$-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t) = \kappa \nabla^2 T \quad (24)$$

若為理想氣體，則溫度與壓力的關係為

$$p = nk_B T$$

因此如果空間中密度變化不大，則  $-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t)$  這項在方程式(18)中，也類似一個 diffusion term。



$$\frac{3}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \right) = -\frac{5}{2} p \nabla \cdot \vec{v} - \left( \vec{\Pi} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \kappa \nabla^2 T$$
$$- \left( \vec{\Pi} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = \eta \sum_{ij} \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \vec{v})^2$$