Let the “row”（列） denote 橫向的一排

Let the “column”（行） denote 縱向的一排

怎麼記？用象形文字的方式記憶。柱子越多的，就是縱向的！

Let A_{ij} denote the element in the i-th row and the j-th column of the matrix A.

Let the matrix A^T denote the transport of the matrix A. (行列對換的「反置矩陣」)

Then, $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ is the element in the i-th row and the j-th column of matrix A^T.
Let $\bar{A}_{ij}$ be the complex conjugate of A_{ij}.
Let the matrix $A^H = \bar{A}^T$ denote the Hermitian of the matrix A.
Then $(A^H)_{ij} = \bar{A}_{ji}$ is the element in the i-th row and the j-th column of matrix A^H.
It can be shown that $(AB)^T = B^T A^T$ and $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

記憶口訣：先穿襪子再穿鞋子，先脫鞋子再脫襪子。

By definition:

- A matrix A is a symmetric matrix (對稱矩陣) if $A_{ij} = A_{ji}$.

  A matrix A is a symmetric matrix (對稱矩陣) if $A = A^T$.

- A matrix A is an antisymmetric matrix (反對稱矩陣) if $A_{ij} = -A_{ji}$.

  A matrix A is an antisymmetric matrix (反對稱矩陣) if $A = -A^T$.

- A matrix A is a Hermitian matrix (self-adjoint matrix) if $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$.
  A matrix A is a Hermitian matrix (self-adjoint matrix) if $A = \bar{A}^T$.
- A matrix A is a unitary matrix If $A^{-1} = \bar{A}^T$ (i.e., $A\bar{A}^T = \overset{\rightrightarrows}{1}$).
- A real matrix A is an orthogonal matrix If $A^{-1} = A^T$ (i.e., $AA^T = \overset{\rightrightarrows}{1}$)
- A real unitary matrix A is an orthogonal matrix.

An $n \times n$ square matrix A can be a representation of a 2nd-rank tensor $\overset{\rightrightarrows}{A}$ of a given set of bases $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots \hat{e}_n\}$ in an n-dimensional space, where $A = [A_{ij}]$ and $\overset{\rightrightarrows}{A} = \sum_i \sum_j [A_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j]$

The representations of the 2nd-rank tensors found in physics are either symmetric (if all the elements are real numbers) or Hermitian (if some of the elements are complex numbers).

所以，你們將來做物理相關研究時，除了要確認，一個方程式中，相加相減的每一項，因次都要一樣，都是純量、或都是向量、或都是二階張量（2^{nd}-rank tensor），也要確保如果出現二階張量，一定是 Hermitian matrix (如果全是實數，就變成是 symmetric matrix)。這是初步檢查，所推導的方程式是否正確的第一步。

Both the Hermitian matrix and the real-number symmetric matrix can be diagonalized and has real number eigen values.

請證明：**The eigenvalues of a Hermitian matrix are all real numbers**

(1) $A = \overline{A}^T$

(2) $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Taking complex conjugate and transpose of equation (2), it yields

(3) $\overline{\mathbf{x}}^T\overline{A}^T = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T$

Substituting equation (1) into equation (3), it yields

(4) $\overline{\mathbf{x}}^T A = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T$

$\overline{\mathbf{x}}^T(2) \Rightarrow$

(5) $\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \lambda\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$

Substituting equation (4) into equation (5), it yields

(6) $\overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = \lambda\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$

Since $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$, equation (6) yields $\overline{\lambda} = \lambda$. That is $\lambda \in R$.

請證明：**The eigenvectors of a Hermitian matrix that corresponding to different eigenvalues are perpendicular to each other**

(1) $A = \overline{A}^T$

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, and both of them are real numbers

(3) $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$

(4) $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$

Taking complex conjugate and transpose of equation (4), it yields

(5) $\overline{\mathbf{x}}_2^T \overline{A}^T = \lambda_2 \overline{\mathbf{x}}_2^T$

Substituting equation (1) into equation (5), it yields

(6) $\overline{\mathbf{x}}_2^T A = \lambda_2 \overline{\mathbf{x}}_2^T$

$\overline{\mathbf{x}}_2^T (3) \Rightarrow$

(7) $\overline{\mathbf{x}}_2^T A \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \overline{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1$

Substituting equation (6) into equation (7), it yields

(8) $\lambda_2 \overline{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \overline{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 \quad \Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = 0$

Since $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, equation (8) yields $\overline{\mathbf{x}}_2^T \mathbf{x}_1 = 0$. That is $\mathbf{x}_2 \perp \mathbf{x}_1$

最後，我想要闡明一件很重要的事：**Matrix 不一定是 張量**

先來看看什麼是張量 tensor？

- 張量是一種「物理量」。物理量，有單位，有因次，可用 LTMQ 來表示之。
- 「**零階張量**」zero-rank tensor，也就是純量 scalar。

  純量只有大小，「**不具方向性**」。

  例如質量 mass，它的因次是 M。
- 「**一階張量**」 first-rank tensor，也就是向量 vector。

  向量有大小也有「**一個方向**」。

  例 1：速度 velocity，它的因次是 L/T，方向是前進方向。

  例 2：角速度 angular velocity，它的因次是 1/T，方向沿轉軸方向。

  給定一個基底 basis，向量在此基底中的表現可以是一個 3x1 的 column matrix 或者 1x3 的 row matrix。

  給不同的基底，同一個向量它的矩陣表示式內容不同。

- 「**二階張量**」 second-rank tensor。

  二階張量有大小也有「**兩個方向**」。

  例 1：轉動慣量 moment of inertia，它的因次是 L^2M，它的兩個方向：一個沿「所施力矩的方向」，一個沿「剛體的角加速度方向」。（或 一個沿「轉動動量方向」，一個沿「角速度方向」。）

  例 2：壓力張量 pressure tensor，它的因次是 M/LT^2，它的兩個方向：一個沿「所施力的方向」，一個沿「受力面的方向」。

  例 3：電導率張量 electrical conductivity tensor，它的因次是 Q^2T/ML^3，它的兩個方向：一個沿「電場方向」，一個沿「電流密度方向」。

  給定一個基底 basis，二階張量在此基底中的表現可以寫成一個 3x3 的方矩陣 square matrix。

  給不同的基底，同一個二階張量它的矩陣表示式內容不同。

很多 Matrix 沒有單位，只是一個「操作子」operator，所以不能說它是一個「張量」

例如：座標轉換的 rotation matrix R，它沒有因次。

如果一個**向量**在基底 B 中的表現為 3x1 column matrix C，但是在基底 B’ 中的表現為 3x1 column matrix C’。則我們可以找到一個 3x3 rotation matrix R such that C’=RC

前文提到，物理上，系統自然形成的二階張量，在一個座標系中的表現式，都是對稱的矩陣或 Hermitian matrix 。例如轉動慣量與熱壓張量。

但是受外力影響所形成的張量，就不一定是對稱的矩陣。例如：不對稱的外力作用在一個物體上，所形成的 pressure tensor，「可能」就是一個不對稱的張量。又例如：中性風碰撞帶電粒子，在 E-region ionosphere (E-層電離層) 所形成的導電率張量 conductivity tensor，它在座標系中的表示式，就是一個對稱的矩陣與反對稱矩陣之和。因此整體就不是一個對稱的矩陣了。同理，一個外加電場，所對應的 dielectric tensor 的表示式也不一定是一個對稱

矩陣。至於電磁波動所對應的 effective conductivity tensor and dielectric tensor 卻可能以 Hermitian matrix 呈現（也就是反對稱項與對稱項差了±90 度的相位）。

Examples

1. 電離層中的導電率張量 $\overleftrightarrow{\sigma}$

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} = \sigma_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + \sigma_p \vec{E}_{\perp} + \sigma_H \hat{B} \times \vec{E}$$

where

$$\vec{E}_{\parallel} = \hat{B}\hat{B} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{E}_{\perp} = \left(\overleftrightarrow{1} - \hat{B}\hat{B}\right) \cdot \vec{E}$$

$$\hat{B} \times \vec{E} = \overleftrightarrow{M}_{\hat{B}\times} \cdot \vec{E}$$

Thus

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E} = \left[\sigma_{\parallel} \hat{B}\hat{B} + \sigma_p \left(\overleftrightarrow{1} - \hat{B}\hat{B}\right) + \sigma_H \overleftrightarrow{M}_{\hat{B}\times}\right] \cdot \vec{E}$$

i.e.

$$\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{\parallel}\hat{B}\hat{B} + \sigma_p\left(\vec{\vec{1}} - \hat{B}\hat{B}\right) + \sigma_H \vec{\vec{M}}_{\hat{B}\times}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_x^2}{B^2} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_xB_y}{B^2} - \sigma_H\dfrac{B_z}{B} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_xB_z}{B^2} + \sigma_H\dfrac{B_y}{B} \\ (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_xB_y}{B^2} + \sigma_H\dfrac{B_z}{B} & \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_y^2}{B^2} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_yB_z}{B^2} - \sigma_H\dfrac{B_x}{B} \\ (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_xB_z}{B^2} - \sigma_H\dfrac{B_y}{B} & (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_yB_z}{B^2} + \sigma_H\dfrac{B_x}{B} & \sigma_p + (\sigma_{\parallel} - \sigma_p)\dfrac{B_z^2}{B^2} \end{bmatrix}$$

For $\vec{B} = B_z\hat{z}$, (i.e., $B_x = B_y = 0$) it yields

$$\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{\parallel}\hat{B}\hat{B} + \sigma_p\left(\vec{\vec{1}} - \hat{B}\hat{B}\right) + \sigma_H \vec{\vec{M}}_{\hat{B}\times} = \begin{bmatrix} \sigma_p & -\sigma_H\dfrac{B_z}{B} & 0 \\ \sigma_H\dfrac{B_z}{B} & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix}$$

因此導電率張量 conductivity tensor，不是一個對稱的矩陣

2. 熱壓張量 thermal pressure tensor $\vec{\vec{P}}$

首先介紹 相空間 phase space $(\vec{x}, \vec{v})$ = real space (x, y, z) + velocity space (v_x, v_y, v_z)

假設一氣體的相空間分佈密度函數為 $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$（因次 T³/L⁶），則依照定義此氣體的

- 個數密度場 number density field 為 （dimension 因次 $1/L^3$）

$$n(\vec{x},t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{1}$$

- 質量密度場 mass density field 為 （dimension 因次 M/L^3）

$$\rho(\vec{x},t)=mn(\vec{x},t)=m\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{2}$$

- 流場（平均速度場）flow field 為 （dimension 因次 L/T）

$$\vec{V}(\vec{x},t)=\frac{\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{v}f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v}{\iiint_{-\infty}^{\infty}f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v}=\frac{\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{v}f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v}{n(\vec{x},t)} \tag{3}$$

也可以說 the mass flux density 為

$$mn(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)=\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)=m\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{v}f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{4}$$

- 熱壓張量場 thermal pressure tensor field 為 （dimension 因次 $M(L/T)^2/L^3=M/T^2L$）

$$\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)=m\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)\right]\left[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)\right]f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{5}$$

也可以說 the momentum flux density 為

$$\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)+\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)=m\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{v}\vec{v}f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{6}$$

- 熱壓場（純量熱壓場）thermal pressure field 為（dimension 因次 M/T²L）

$$p(\vec{x},t)=\frac{1}{3}\mathrm{trace}[\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)]=\frac{1}{3}m\iiint_{-\infty}^{\infty}[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)]\cdot[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)]f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{7}$$

- Stress tensor field 為（dimension 因次 M/T²L）

$$\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)=\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)-p(\vec{x},t)\vec{\vec{1}} \tag{8}$$

- 熱流張量場 heat flux tensor field 為 （dimension 因次 M/T³）

$$\vec{\vec{\vec{Q}}}(\vec{x},t)=m\iiint_{-\infty}^{\infty}[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)][\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)][\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)]f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{9}$$

- 熱流向量場（通常簡稱熱流場 heat flux）為 （dimension 因次 M/T³）

$$\vec{q}(\vec{x},t)=\frac{1}{2}m\iiint_{-\infty}^{\infty}[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)]\cdot[\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)][\vec{v}-\vec{V}(\vec{x},t)]f(\vec{x},\vec{v},t)d^3v \tag{10}$$

流體方程式（Chapter 8 Fluid Equations 補充教材）

我們可以由「相空間分佈密度函數」(Phase space density) $f(\vec{x},\vec{v},t)$ 所滿足的波茲曼方程式 Boltzmann equation

$$\frac{\partial f(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial t}+\vec{v}\cdot\frac{\partial f(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial \vec{x}}+\frac{\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t)}{m}\cdot\frac{\partial f(\vec{x},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}}=\left(\frac{\delta f(\vec{x},\vec{v},t)}{\delta t}\right)_{collision} \tag{11}$$

其中 $\vec{F}(\vec{x},\vec{v},t)$ 為一種 phase space 中的 Force field，推導出

連續方程式 Continuity equation

$$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t}=-\nabla\cdot\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\right] \tag{12}$$

動量方程式 Momentum equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\right]=-\nabla\cdot\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)+\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)\right]+\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x},t) \tag{13}$$

or

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\right]=-\nabla\cdot\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)+p(\vec{x},t)\vec{\vec{1}}+\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)\right]+\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x},t) \tag{14}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x},t)$ 為一種 real space 中的 Force field。

利用 Equation (12), Equation (14) 可化簡為

$$\rho(\vec{x},t)\left[\frac{\partial\vec{V}(\vec{x},t)}{\partial t}+\vec{V}(\vec{x},t)\cdot\nabla\vec{V}(\vec{x},t)\right]=-\nabla p(\vec{x},t)-\nabla\cdot\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)+\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x},t) \tag{15}$$

壓力方程式 Pressure equation

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)+\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)\right]\\&=-\nabla\cdot\left[\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)+\left(\vec{\vec{P}}\vec{V}\right)^{S}+\vec{\vec{\vec{Q}}}(\vec{x},t)\right]+\left(\vec{V}\vec{\boldsymbol{F}}\right)^{S}\end{aligned} \tag{16}$$

能量方程式 Energy equation

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\cdot\vec{V}(\vec{x},t)+\frac{3}{2}p(\vec{x},t)\right]\\&=-\nabla\cdot\left\{\left[\frac{1}{2}\rho(\vec{x},t)\vec{V}(\vec{x},t)\cdot\vec{V}(\vec{x},t)+\frac{3}{2}p(\vec{x},t)\right]\vec{V}(\vec{x},t)+\vec{\vec{P}}(\vec{x},t)\cdot\vec{V}(\vec{x},t)\right.\\&\qquad\left.+\vec{q}(\vec{x},t)\right\}+\vec{V}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\end{aligned} \tag{17}$$

利用 Equations (12) & (15), Equation (17) 可化簡為

$$\frac{3}{2}\left[\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t}+\vec{V}(\vec{x},t)\cdot\nabla p(\vec{x},t)\right] = -\frac{5}{2}p(\vec{x},t)\nabla\cdot\vec{V}(\vec{x},t)-\left[\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)\cdot\nabla\right]\cdot\vec{V}(\vec{x},t)-\nabla\cdot\vec{q}(\vec{x},t) \tag{18}$$

以上這些方程式中的變數，都只是 $(\vec{x},t)$ 的函數。比$f(\vec{x},\vec{v},t)$的自由度少。但是

- 要知道質量密度場 $\rho(\vec{x},t)$如何隨時間變化，要先知道質量密度場與平均速度場的空間分佈。
- 要知道平均速度場 $\vec{V}(\vec{x},t)$如何隨時間變化，要先知道密度場、平均速度場、熱壓場、Stress Tensor 與背景力場的空間分佈。
- 要知道熱壓場 $p(\vec{x},t)$如何隨時間變化，要先知道密度場、平均速度場、熱壓場、Stress Tensor、背景力場、以及熱流場的空間分佈。

同理要知道 Stress Tensor $\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)$以及熱流場 $\vec{q}(\vec{x},t)$ 如何隨時間變化，就要考慮更多方程式。若要用壓力方程式 Pressure equation (16) 來求 $\vec{\vec{\Pi}}(\vec{x},t)$，就需要先知道熱流張量場 $\vec{\vec{\vec{Q}}}(\vec{x},t)$ 的空間分佈。如此，沒完沒了！ 科學家為了要做一個「了斷」，通常就會對熱壓

場、Stress Tensor $\overleftrightarrow{\Pi}(\vec{x},t)$、以及熱流場 $\vec{q}(\vec{x},t)$做了一些假設，假設他們是平均速度場的梯度函數，或是溫度梯度的函數。於是讓整個系統能有一個唯一解。只是，這些假設，在非線性物理過程中，不一定適用。

課本第十章，就根據熱壓張量的特性，介紹科學家如何「猜」熱壓張量與平均速度場梯度之間的關係。由方程式(5), (7), (8) 可知 $\overleftrightarrow{P}$ 是一個「對稱張量」，而 stress tensor $\overleftrightarrow{\Pi}$ 則是一個「對稱且對角線和為零的張量」，因此 科學家 猜出以下「對稱張量」

$$\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t$$

因為

$$\frac{1}{3}\mathrm{trace}\left[\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t\right] = \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{V}$$

因此

$$\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{V})\overleftrightarrow{1}$$

就是一個「對稱且對角線和為零的張量」。故科學家令 stress tensor $\overleftrightarrow{\Pi}$ 可改寫為

$$\overleftrightarrow{\Pi} = -\eta\left[\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{V})\overleftrightarrow{1}\right] \tag{19}$$

為何取負號，後面就真相大白了。

因此熱壓張量可改寫為

$$\overleftrightarrow{P} = p\overleftrightarrow{1} - \eta\left[\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{V})\overleftrightarrow{1}\right] \tag{20}$$

若 η 是常數，則 stress 梯度力可改寫為

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi} = \eta\nabla\cdot\left[\nabla\vec{V} + \left(\nabla\vec{V}\right)^t - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{V})\overleftrightarrow{1}\right] = \left[\eta\nabla^2\vec{V} + \eta\left(1-\frac{2}{3}\right)\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\right]$$

or

$$-\nabla\cdot\overleftrightarrow{\Pi} = \eta\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\eta\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) \tag{21}$$

Equation (15)就可改寫為

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right) = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\eta\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) + \vec{\boldsymbol{F}} \tag{22}$$

其中

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$

就像一個擴算方程式 Diffusion equation，所以 $\eta\nabla^2\vec{V}$ 就是一個耗散項，會讓空間中的速度切變小（速度差異變小）。這就是為什麼 Equation (19)中，科學家決定比例常數前面取負號而非正號。

同理，科學家也假設熱流正比於溫度梯度，方向與溫度梯度方向相反（熱流由高溫流向低溫），也就是

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \tag{23}$$

若κ為常數，則方程式(18)中的熱流項可改寫為

$$-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t) = \kappa \nabla^2 T \tag{24}$$

若為理想氣體，則溫度與壓力的關係為

$$p = n k_B T$$

因此如果空間中密度變化不大，則$-\nabla \cdot \vec{q}(\vec{x}, t)$這項在方程式(18)中，也類似一個 diffusion term。

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla p\right)=-\frac{5}{2}p\nabla\cdot\vec{V}-\left(\vec{\vec{\Pi}}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V}(\vec{x},t)+\kappa\nabla^2 T$$

$$-\left(\vec{\vec{\Pi}}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{V}(\vec{x},t)=\eta\sum_{ij}\left[\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\eta\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)^2$$