Lecture 1 Introduction to Plasma

Key points

- Composition of plasma
- Collective behavior of plasma
- Continuous medium
- States of matter
- Collisional plasma vs. Collisionless plasma
- Dielectric medium
- Maxwell's equations
- Equations of motion
- Fluid equations

What is Plasma? 電漿（plasma）是什麼？

- 電漿是中性氣體被高能光子或高能粒子撞擊游離後所形成的一種由「正負電荷粒子」所組成的「連續體」。
- 連續體 vs. 粒子 = 社會 vs. 個人。
- 連續體中的粒子彼此互相影響 (Collective behavior)
- 連續體：可變形、有密度概念。
    - 鋼筋是「固態」的連續體。
    - 水是「液態」的連續體。
    - 空氣是「氣態」的連續體。
    - 火是「電漿態」的連續體。

我們說的「電漿」就是大陸科學界說的「等離子體」

- 因為 plasma physics 是二次世界大戰後的新興科學，所以兩岸的名詞翻譯不一致。我們將 plasma physics 翻譯做「電漿物理」因為 blood plasma 被翻譯做「血漿」。而血漿是兩岸分治以前就確認的譯名。
- 我們的翻譯，強調電漿的 Collective behavior 。
- 對岸的翻譯，強調電漿是由中性氣體粒子游離而成。
- 古典物理中，物質有四態：
  - 我們：固態、液態、氣態、電漿態。
  - 對岸：固體、液體、氣體、等離子體。

物質的狀態（States of Matter）有多少種？

- 古典的物質狀態，由低溫到高溫，包括了：固態、固液混合態、固液氣混合態、液態、液氣混合態、氣態、部分游離的中性氣體與電漿混合態、完全游離的電漿態。
- 非古典物質狀態包括了極低溫的各種量子態，例如恆星死亡後會變成：電子簡併態（白矮星）、中子簡併態（中子星）、夸克子簡併態（夸克星）。
- 電漿態是目前已知的物質狀態中，最高溫的一種物態。根據大霹靂說，在宇宙霹靂炸開後的第一個狀態，就是一種高溫的電漿狀態。

地表的物態主要為固態、液態、與氣態。可是宇宙中的物質，卻多以電漿態呈現：

- 在「暗物質」（dark matter）理論出現之前，科學家相信宇宙中的物質99%都是以電漿態呈現。
- 因為目前的天文理論模式與觀測不符，因此一些天文學者引進了「暗物質、暗能量」這些概念。究竟什麼是暗物質？目前還沒有答案。看來它們是一些「不發光」的物質，這些物質的成份可能還是由以上所介紹的各種古典與量子物態所組成！

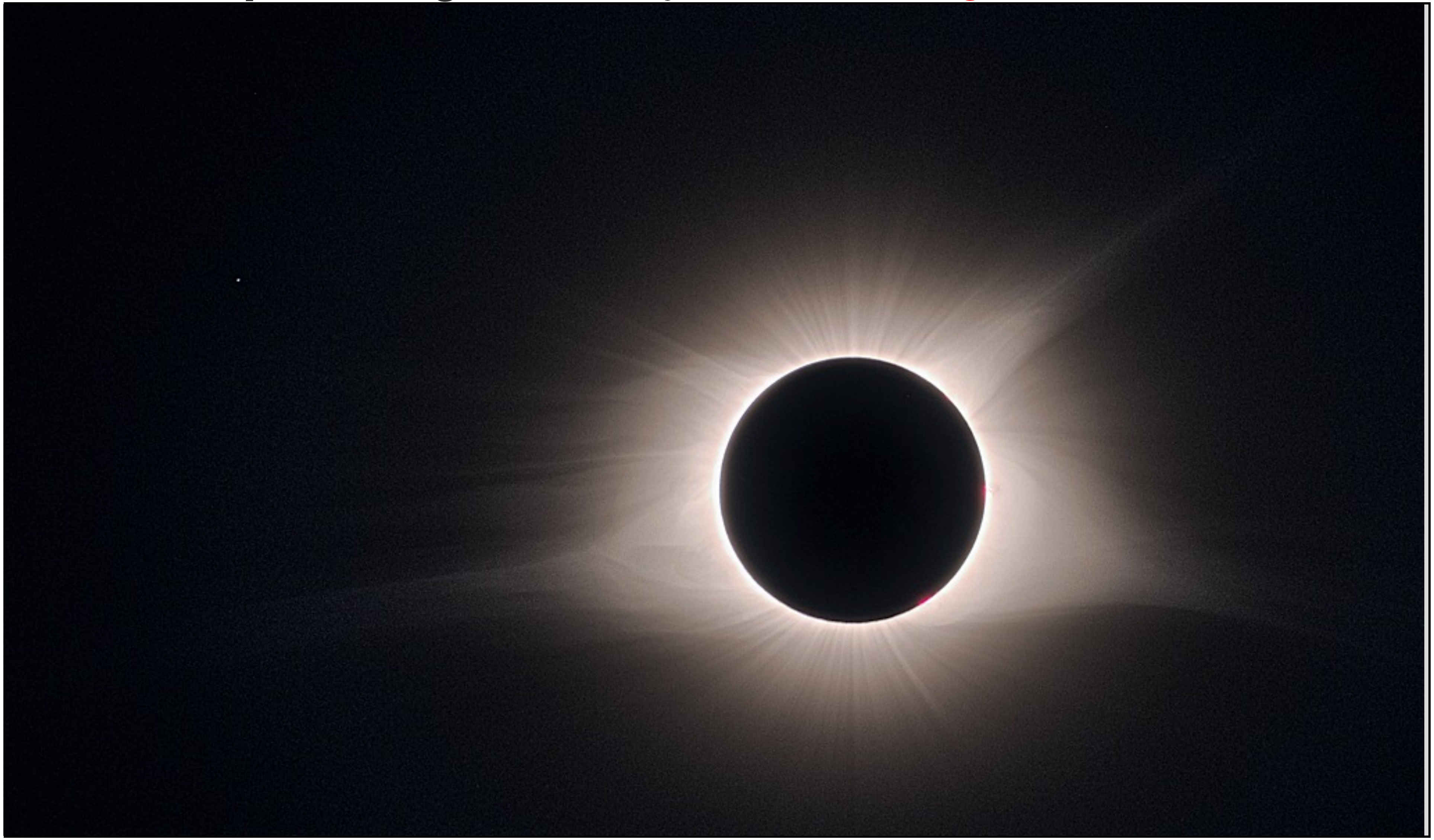
Collision vs. Collective behavior：

- 空氣與水，都是藉由碰撞來交換動量與動能，好讓一團空氣或一團水能一起運動。（碰撞→集體效應）
- 可是正負電荷碰撞會變回中性粒子，使電漿消失，因此碰撞不是造成電漿集體效應的主因。碰撞反而是造成部分游離電漿，如電離層與天文中的吸積盤 accretion disk 中，中性氣體間接受電磁力影響而運動的主因。
- 大多數的電漿中是靠電漿運動所產生的電場與磁場，來帶動電漿粒子一起運動。（電力 + 磁力→集體效應）

電漿發光： 碰撞→正負電荷重新結合→放出游離能→發光

- 密度高的電漿，或電漿與中性大氣混合態，碰撞造成的發光顏色，與電漿與氣體溫度有關。例如：
  - 火 、閃電、恆星表面的發光光譜
- 密度低的大氣與電漿混合態，若被高速粒子撞擊而發光，或因為熱源喪失而逐漸還原成中性大氣，都會發出與「成分」有關的特定光譜 。
  - 極光、 日光燈、霓虹燈、日冕電漿
- 下一頁，日食發生時的日冕照片取材自 http://spaceweathergallery.com/indiv_upload.php?upload_id=137940

Solar Eclipse image taken by Mark Rosengarten on 08/21/2017



介電質（dielectric medium）

- 水是一種極性分子，所以水是一種介電質。
- 很多金屬可以導電，因為它們有很多自由的價電子，所以也是一種介電質。
- 電漿是由帶電的粒子所組成的，所以電漿是一種「導電係數」很高的介電質。

會導電的介電物質會影響電磁波的傳播：（Why? 想一想！）

- 電離層電漿會影響衛星與地面之間的電磁波通訊。
- 反過來，我們也可以利用電漿影響電磁波的行為，遠距遙測恆星表面與星系盤面上方磁場的方向。

Source terms (ρ_c & $\vec{J}$) in the Maxwell equations:

- Dielectric medium 在 Maxwell equations 中，以 bounded charge density ρ_{cb} and bounded electric current density $\vec{J}_b$ 呈現。因為它們會受電場與磁場的影響，故 $\rho_{cb}(\vec{E})$ 與 $\vec{J}_b(\vec{E},\vec{B})$ 為電場與磁場的函數。
- 相對於 bounded ρ_{cb} 與 $\vec{J}_b$ ，外加的電荷密度 ρ_{cf} 與外加的電流密度 $\vec{J}_f$ 是不受電場與磁場的影響 (free from the influences of E field and B field)
- 因此，Maxwell Equations 可以用以下兩種方式表示：(in SI units)

$\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{cb} + \rho_{cf}}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{cf}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_b + \vec{J}_f\right) + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

where $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\vec{\epsilon}}_r \cdot \vec{E}$ and $\vec{B} = \mu_0 \vec{\vec{\mu}}_r \cdot \vec{H}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = -\rho_{cb}(\vec{E}) + \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{\vec{\epsilon}}_r \cdot \vec{E})$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{H} + \mu_0 \vec{J}_b(\vec{E}, \vec{B}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{\vec{1}} - \vec{\vec{\epsilon}}_r\right) \cdot \vec{E}\right]$$
$$= \nabla \times (\mu_0 \vec{\vec{\mu}}_r \cdot \vec{H})$$

- 如果介電質是一個「固態」或「液態」的結構，通常我們會用 relative permittivity 相對電導率 $\vec{\vec{\epsilon}}_r$ 與 relative permeability 相對磁導率 $\vec{\vec{\mu}}_r$ 來描述它對電場與磁場所造成的影響。
- 可是電漿這個介電質，我們對它的組成粒子的運動，非常了解，所以我們可以直接研究電漿粒子在電場與磁場中的運動所造成的電荷分離與電流變化，來估算 bounded ρ_{cb} 與 $\vec{J}_b$。所以就不必借助 相對電導率 $\vec{\vec{\epsilon}}_r$ 與相對磁導率 $\vec{\vec{\mu}}_r$ 來描述電漿對周遭電場與磁場所造成的影響。（亦即，用上表左側方程式 研究電漿物理）

Note that a second rank tensor can map one vector to another vector in different direction and magnitude. For example, a force $\vec{F}$ acting on a surface $\vec{A}$ will result in a pressure $\vec{\vec{P}}$ on the surface. It yields

$$\vec{F} = \vec{\vec{P}} \cdot \vec{A}$$

where the pressure $\vec{\vec{P}}$ is a second rank tensor.

Similarly, conductivity $\vec{\vec{\sigma}}$, relative permittivity $\vec{\vec{\epsilon}}_r$, and relative permeability $\vec{\vec{\mu}}_r$ are all second rank tensors

$$\vec{J} = \vec{\vec{\sigma}} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{\vec{\epsilon}}_r \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{\vec{\mu}}_r \cdot \vec{H}$$

Maxwell Equations + Equations of Motion and/or Fluid Equations ➔ 研究電漿物理的基本方程組

假設沒有外加的電荷與電流，則 Maxwell Equations 為：

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$	(1.1)
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	(1.2)
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(1.3)
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(1.4)

where $\rho_c = \rho_{cb}$ and $\vec{J} = \vec{J}_b$. We can determine ρ_c and $\vec{J}$ from 粒子的空間分佈與平均速度空間分佈。(see p. 25)

若忽略重力效應，電漿中第α種粒子（帶電荷 e_α，質量 m_α）中第 k 個粒子，如果動能遠小 $m_\alpha c^2$，將會滿足以下非相對論的運動方程式 Non-relativistic Equations of Motion

$$\frac{d\vec{x}_k(t)}{dt} = \vec{v}_k(t)$$	(1.5)
$$\frac{d\vec{v}_k(t)}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}[\vec{E}(\vec{x} = \vec{x}_k, t) + \vec{v}_k(t)\times\vec{B}(\vec{x} = \vec{x}_k, t)]$$	(1.6)

若忽略重力效應，電漿中第α種粒子（帶電荷 e_α，質量 m_α）中第 k 個粒子，如果動能接近或大於 $m_\alpha c^2$，則會滿足以下相對論的運動方程式 Relativistic Equations of Motion

$$\frac{d\vec{x}_k(t)}{dt} = \frac{\vec{u}_k(t)}{\sqrt{1+(u_k^2/c^2)}}$$

$$\frac{d\vec{u}_k(t)}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}(\vec{x}=\vec{x}_k,t) + \frac{\vec{u}_k(t)}{\sqrt{1+(u_k^2/c^2)}} \times \vec{B}(\vec{x}=\vec{x}_k,t)\right]$$

Note that if the particle speed is close to the speed of light, the momentum equation of the charged particle becomes

$$\frac{d[\gamma_k(t)\vec{v}_k(t)]}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E} + \vec{v}_k(t)\times\vec{B}\right] \tag{1.7}$$

where

$$\gamma_k(t) = {}^{1}\!\Big/\!\sqrt{1 - [\vec{v}_k(t)\cdot\vec{v}_k(t)/c^2]} \tag{1.8}$$

For convenience, we can define a new variable, $\vec{u}_k(t) = \gamma_k(t)\vec{v}_k(t)$, which is called the Minkowski momentum per unit mass. Equations (1.5), (1.7), & (1.8) can be rewritten as

$$\frac{d\vec{x}_k(t)}{dt} = \frac{\vec{u}_k(t)}{\gamma_k(t)} \tag{1.9}$$

$$\frac{d\vec{u}_k(t)}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E} + \frac{\vec{u}_k(t)}{\gamma_k(t)} \times \vec{B}\right] \tag{1.10}$$

$$\gamma_k(t) = \sqrt{1 + [\vec{u}_k(t) \cdot \vec{u}_k(t)/c^2]} \tag{1.11}$$

Exercise 1.1.

(a) Prove Equation (1.11).

(b) Show that the kinetic energy $K.E.$ of the relativistic particle can be written as

$$K.E. = \frac{m\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k}{\gamma_k + 1} \tag{1.12}$$

How to obtain the fluid equations （過程略述）

- 很多「非相對論」的α種粒子集合起來，可以得到 Klimontovich equation of the αth species.

  （參見 Lyu [2014] 第二章的推導 ）

- Ensemble average of the Klimontovich equation and ignoring the collisional effect, it yields the Vlasov equation of the αth species.

  （參見 Lyu [2014] 第二章的推導 ）

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{x},t)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right) f_\alpha(\vec{x},\vec{v},t) = 0 \tag{1.13}$$

- Taking the zeroth moment of the Vlasov equation and integrating over the entire velocity space, it yields the continuity equation of the αth species.
- Taking the first moment of the Vlasov equation and integrating over the entire velocity space, it yields the momentum equation of the αth species.
- Taking the second moment of the Vlasov equation and integrating over the entire velocity space, it yields the energy equation of the αth species.

（相關流體方程式，參見 Lyu [2014] 第三章的推導）

總結：Equations of Motion → Klimontovich equation → Vlasov equation → Fluid equations

$\dfrac{\partial n_\alpha(\vec{x},t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\, n_\alpha(\vec{x},t)\vec{V}_\alpha(\vec{x},t)] = 0$	(1.14)
$\dfrac{\partial m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)\vec{V}_\alpha(\vec{x},t)}{\partial t}$ $+\nabla \cdot \left[m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)\vec{V}_\alpha(\vec{x},t)\,\vec{V}_\alpha(\vec{x},t) + \vec{\vec{P}}_\alpha(\vec{x},t) \right]$ $= e_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)[\vec{E}(\vec{x},t) + \vec{V}_\alpha(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t)]$	(1.15)
$\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{1}{2} m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)V_\alpha^2(\vec{x},t) + \dfrac{3}{2}p_\alpha(\vec{x},t)\right]$ $+\nabla \cdot \left\{\left[\dfrac{1}{2} m_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)V_\alpha^2(\vec{x},t) + \dfrac{3}{2}p_\alpha(\vec{x},t)\right] \vec{V}_\alpha(\vec{x},t) + \vec{\vec{P}}_\alpha(\vec{x},t) \cdot \vec{V}_\alpha(\vec{x},t) + \vec{q}_\alpha(\vec{x},t)\right\} = e_\alpha n_\alpha(\vec{x},t)\vec{E}(\vec{x},t) \cdot \vec{V}_\alpha(\vec{x},t)$	(1.16)

where $\alpha = i \; or \; e$

$n_\alpha(\vec{x}, t)$ is the number density of the αth species,

$\vec{V}_\alpha(\vec{x}, t)$ is the average flow velocity of the αth species,

$\vec{\vec{P}}_\alpha(\vec{x}, t)$ is the thermal pressure tensor of the αth species,

$p_\alpha(\vec{x}, t)$ is the scalar pressure of the αth species,

$\vec{q}_\alpha(\vec{x}, t)$ is the heat flux vector of the αth species,

and we define

$$p_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} trace[\vec{\vec{P}}_\alpha(\vec{x}, t)] \tag{1.17}$$

也就是說，純量的熱壓 $p_\alpha(\vec{x}, t)$ 定義為二階張量熱壓 $\vec{\vec{P}}_\alpha(\vec{x}, t)$ 對角線和的三分之一。

If we assume that the thermal pressure of the αth species is isotropic and assume that the change on the thermal pressure is an adiabatic process, the above fluid equations can be casted into the following simplified fluid equations: continuity equation, momentum equation, adiabatic equation of state (energy equation) of the αth species. （詳見 Lyu [2014] 第三章的推導）

$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla\right] n_\alpha = -n_\alpha \nabla \cdot \vec{V}_\alpha$	(1.18)
$n_\alpha m_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla\right] \vec{V}_\alpha = -\nabla p_\alpha + e_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B})$	(1.19)
$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla\right] p_\alpha = \frac{5}{3} \frac{p_\alpha}{n_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla\right] n_\alpha$	(1.20)

方程式(1.1) 與 (1.4) 中的 ρ_c 與 $\vec{J}$ 分別等於

$$\rho_c = e(n_i - n_e)$$

$$\vec{J} = e(n_i\vec{V}_i - n_e\vec{V}_e)$$

因此將方程式(1.1)~(1.4)與(1.18)~(1.20) （$\alpha = i \; or \; e$）聯立起來，就可以用來研究電子與質子雙流體系統中的各種電漿波動現象。但是由於這組方程式跨越的尺度太大，可達 10^9 以上，使用起來並不方便，因此電漿物理中，會針對低頻長波的擾動做一些簡化，來研究太陽風中的擾動。也會針對高頻短波的擾動做一些簡化，用來研究電離層中的擾動。介於兩者之間的擾動方程式最複雜，但也非常有趣，等大家上了研究所再學吧！