Lecture 4 Periodic Motions and Drift Motions in Plasma

Key points Magnetic moment

$$\mu = IA = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^{2}}{B}$$

Action of a cyclic motion

$$J = \oint pdq$$

$$J_1 = \oint mv_{\perp} r d\theta$$

$$J_2 = \oint mv_{\parallel} ds_{\parallel}$$

$$J_3 = \oint mv_{\phi} ds_{\phi}$$

Magnetic moment 磁矩

磁矩定義為一個環形電流乘以此環形電流所繞行涵蓋的面積。

$$\mu = IA$$

一個繞磁場打轉的電荷，帶電量為q ，質量 m ，則此電荷繞磁場打轉時的平均 Magnetic moment 大小 為

$$\mu = IA = \frac{dq}{dt}\pi r^2 = \frac{|q|}{2\pi/\Omega_c}\pi\left(\frac{v_\perp}{\Omega_c}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}$$

where $\Omega_c = |qB/m|$

註：此電荷繞磁場打轉時，也相當於一個小磁鐵，磁矩向量為

$$\vec{\mu} = -\hat{B}\,\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}$$

Action of a cyclic motion

對於一個近似週期運動行為，可以定義一個物理量，叫做“action“。如果影響此近似週期運動的外來條件，在一個週期的時空範圍裡，變化夠小的話，“action“就會守恆。這是一個非常好用的條件。

範例一：緩慢的將一個單擺的繩子穿過一個空心圓環， 往下拉，逐漸縮短單擺長度。如果在一個單擺週期內，繩長減少量小於原來繩長的千分之一，則此單擺運動的週期會變，震盪幅度會變，但是“action“會守恆 。

範例二：一個繞磁場打轉的電荷，帶電量為q ，質量 m ，如果在此電荷繞磁場打轉一週的「時」「空」尺度下，磁場的「大小」與「方向」變化都不大（每一分量都小於背景磁場分量的千分之一）時，則此打轉運動的"action" J_1 會守恆。

$$J_1 = \oint m v_\perp r d\theta = m v_\perp \left(\frac{v_\perp}{\Omega_c}\right) 2\pi = \frac{4\pi m}{|q|} \left(\frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B}\right)$$

Since $4\pi m/|q|$ is a constant, the constant action J_1 implies

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} = \text{constant}$$

所以一個繞磁場打轉的電荷，帶電量為q ，質量 m ，如果在此電荷繞磁場打轉一週的「時」「空」尺度下，磁場的「大小」與「方向」變化都不大，則此打轉運動的 magnetic moment 磁矩 μ 會守恆。由於

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^{2}}{B}$$

影響 μ 的物理量主要是磁場。相同磁場中，電子的迴旋半徑比較小，週期比較短，所以電子的磁矩比質子（或其他正離子）的磁矩，容易守恆。

範例三：一個繞磁場打轉的電荷，帶電量為q ，質量 m ，在一個磁瓶 magnetic bottle 或磁鏡 magnetic mirror 結構中進行彈跳運動 bounce motion ，則此彈跳運動的"action" J_2 會守恆 。 如果影響此粒子在此磁瓶 magnetic bottle 或磁鏡 magnetic mirror 結構中進行彈跳運動的外來因素，在一個 bounce 週期中，變化很小，則此 bounce motion 的"action" J_2 會守恆，其中，$J_2 = \oint m v_{\parallel} ds_{\parallel}$。

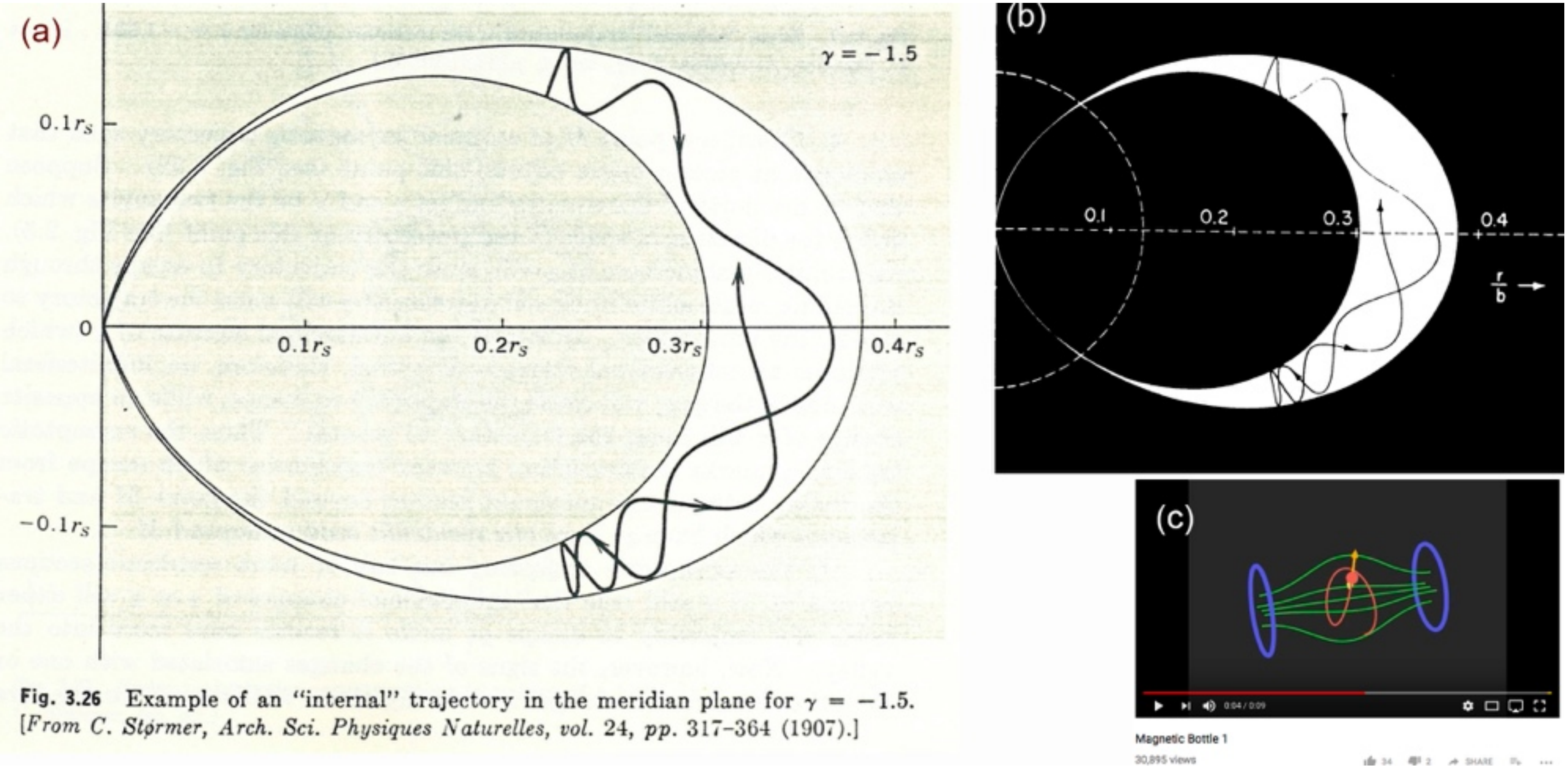

Fig. 3.26 Example of an "internal" trajectory in the meridian plane for $\gamma = -1.5$. [*From C. Størmer, Arch. Sci. Physiques Naturelles, vol. 24, pp. 317–364 (1907).*]

圖 4.1 磁瓶 magnetic bottle 或磁鏡 magnetic mirror 示意圖

(a) from Rossi & Olbert (1970); Størmer (1907) (Rossi → Olbert → 趙寄昆 → 呂凌霄)

(b) from Kivelson & Russell (1995) (c) from https://www.youtube.com/watch?v=FiwqNDJuGkI

為何會有彈跳運動 bounce motion 呢？

Bounce motion 跟 magnetic moment「磁矩趨近守恆」有關。假設一個帶電粒子在一個兩端磁場強（最強處磁場強度為 B_{max}），中間磁場弱（最弱處磁場強度為B_0）的磁瓶中運動。假設這個磁場結構不隨時間改變，且 DC 電場為零，並忽略重力，則此帶電粒子的「動能守恆」（因為粒子只受磁力，而磁力不會做功）。如果這個帶電粒子通過磁場強度最弱的區域時，具有垂直磁場的速度分量 $v_{\perp 0}$ 與平行磁場的速度分量 $v_{\parallel 0}$，則此帶電粒子（質量 m，帶電量 q）運行到磁場強度為 B 的地方（$B_0 < B < B_{max}$），它的速度分量就會滿足

$$\frac{1}{2}m\left(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{B} \tag{4.2}$$

由以上兩個方程式(4.1)與(4.2)可知，當磁場強度 B 持續增加時，垂直磁場速度分量 $v_{\perp}$ 會持續加大，而平行磁場速度分量 $v_{\parallel}$ 的大小會持續減小，但 $|v_{\parallel}|$ 最多減到零。我們稱 $v_{\parallel} = 0$ 的位置為 mirror point。這時的磁場強度就是 B_{mirror} 。

依照以上的說法，我們可得到以下兩個關係式

$$\frac{1}{2}m\left(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2\right) = \frac{1}{2}m(v_{\perp mirror}^2) \tag{4.3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp mirror}^2}{B_{mirror}} \tag{4.4}$$

Substituting Eq.(4.3) into Eq.(4.4) to eliminate $v_{\perp mirror}^2$, it yields

$$\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}m\left(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2\right)}{B_{mirror}} \tag{4.5}$$

由 Eq.(4.5)可以算出

$$B_{mirror} = B_0 \frac{\left(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2\right)}{v_{\perp 0}^2} \tag{4.6}$$

Let pitch angle (投擲角) α be the acute angle between $\vec{B}$ and $\vec{v}$. Let α_0 be the pitch angle at $B = B_0$. It yields

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2} = \sin^2 \alpha_0$$

因此 Eq.(4.6) 可以改寫為

$$B_{mirror} = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0} \tag{4.7}$$

如果計算出來的 $B_{mirror} < B_{max}$ 則此帶電粒子會回頭走，直到走到另一側磁場強度也是 B_{mirror} 的地方，然後此帶電粒子，就會在這兩個 mirror points 之間，來回彈跳。如圖 4.1 所示。

反之，如果算出來的 $B_{mirror} > B_{max}$ 則此帶電粒子會流失 (loss) 到磁瓶之外。這些流失的帶電粒子，會讓磁場強度最弱區（B_0處）的電漿粒子「速度」空間分佈出現一個 Loss-cone distribution（損失錐分布）。如圖 4.2 所示，其中 Loss-cone angle α_{Loss} is a function of B_0 and B_{max}. Based on Eq.(4.7), the loss-cone angle α_{Loss} should satisfy

$$\sin^2 \alpha_{Loss} = \frac{B_0}{B_{max}} \tag{4.8}$$

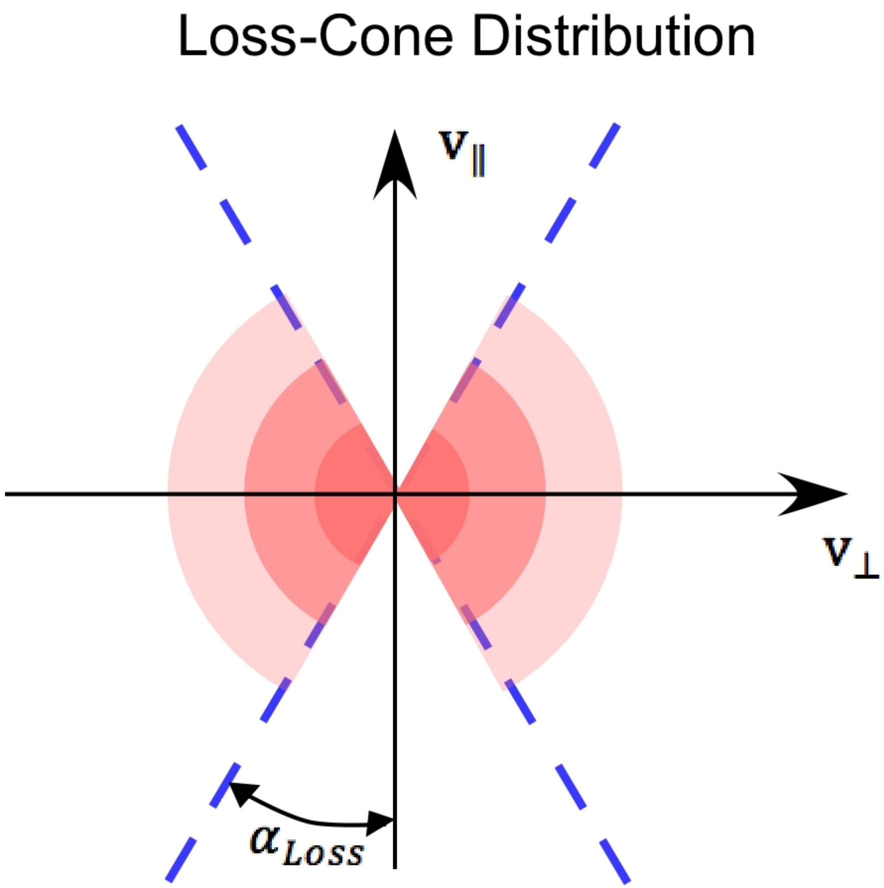

圖 4.2. 速度空間中損失錐分布的示意圖（A sketch of Loss-cone distribution in the velocity space），其中 α_{Loss} 滿足 Eq.(4.8).

問題：

當磁場強度 B 持續增加時，垂直磁場速度分量 $v_\perp$ 會持續加大，而平行磁場速度分量 $v_\parallel$ 的大小會持續減小，但 $|v_\parallel|$ 最多減到零。我們稱 $v_\parallel = 0$ 的位置為 mirror point。也就是說，此時粒子會回頭走，$v_\parallel$ 會 change sign.

1. 請問，粒子是否可能停下在原地打轉，持續維持 $v_\parallel = 0$ ？不論答案是肯定的或者是否定的，都請說明原因。

2. 坊間一些課本的作者解釋帶電粒子回頭走，乃是因為粒子受到一個平行磁場的磁壓力 $-\nabla_\parallel(B^2/2\mu_0)$ 所製。請問這種說法合理嗎？為什麼？

如果在一個 bounce 週期的時空範圍裡，磁瓶或磁鏡的結構變化不大，則 bounce motion 所對應的 action J_2 會是一個守恆量。其中

$$J_2 = \oint m v_{\parallel} d s_{\parallel}$$

通常 bounce period 遠長於 gyro period，也因此 J_1 比 J_2 容易守恆。事實上，J_2 要守恆的先決條件就是 J_1 要守恆（也就是磁矩 μ 要守恆）。

飄（漂）移運動 drift motion

帶電粒子，除了會繞著磁場打轉 gyro motion，也會在兩個強磁場所構成的磁瓶中進行彈跳動 bounce motion。最後還會在不均勻的磁場結構中進行飄移運動 drift motion。在 drift motion 過程中，平均一個迴旋週期的時間裡，粒子的平均位置為 guiding center， 也就是說，帶電粒子本身會繞著 guiding center 打轉。而 guiding center 會發生各種飄移。

最常見的一種飄移運動，就是 E X B drift。其他還有

gravitational drift　　polarization drift

grad B drift　　curvature drift

至少有以下四種方式，來了解 E X B drift

1. Solving the equation of motion with the given E field and B field directly.
2. Changing the moving frame to the guiding canter moving frame, where E=0, then changing back to the original moving frame with a DC Electric field.
3. Considering the change of kinetic energy, thus the change of gyro radius.
4. Taking time-averaging to remove the high-frequency part of the motion.

其中第 1 種方法，任何複雜的問題都可以做。但是通常是數值解 numerical solution. 只有以下超簡化的命題，才有解析解。

第 2 種方法，最適合解 E x B drift. 可以得到定性與定量的解，以及軌跡圖型。唯一的缺點是，此法不適用於其他飄移運動。

第 3 種方法，考慮迴旋半徑大小的變化，來決定漂移的方向，這種方法，可適用於所有單一粒子飄移運動。唯一的缺點是，無法取得定量的數據，只能獲得定性的結果。

第 4 種方法，它的適用範圍更廣，可適用於所有 multi-timescale processes. 尤其當兩個 timescales 的時間尺度相差很多的時候。也就是說，第 4 種方法不只適用於分析帶電粒子在磁場中的漂移運動，也適合研究高低頻波動的耦合過程。

超簡化的命題：

在一個均勻的磁場中，若有一個垂直於磁場的電場，則 (a) 證明或說明粒子的迴旋中心會沿著 $\vec{E}\times\vec{B}$ 的方向飄移，(b) 其飄移速度大小為 $\vec{E}\times\vec{B}/B^2$.

試用以上四種方法說明(a) 或證明 (b) 。

Exercise 4.1

Let us consider an electron moving in a system with $\vec{E} = \hat{y}\,60\,\mathrm{mV/m}$, $\vec{B} = \hat{z}\,200\,\mathrm{nT}$. Please determine the drift velocity, the gyro speed, and the trajectory of the electron, if the electron is located at $x = y = z = 0$ at $t = 0$, and the electron's initial velocity is

(1) $\vec{v} = \hat{x}\,800\,\mathrm{km/s}$
(2) $\vec{v} = \hat{x}\,600\,\mathrm{km/s}$
(3) $\vec{v} = \hat{x}\,400\,\mathrm{km/s}$
(4) $\vec{v} = \hat{x}\,300\,\mathrm{km/s}$
(5) $\vec{v} = \hat{x}\,200\,\mathrm{km/s}$

Applications: (a) Pick-up ions in the comet tail (b) the Hall effect in the E-region ionosphere