

Lecture 3

Characteristic Length in Plasma

Key points

electron Debye Length $\lambda_{De} = v_{the}/\omega_{pe}$

ion Debye Length $\lambda_{Di} = v_{thi}/\omega_{pi}$

electron inertial length c/ω_{pe}

ion inertial length c/ω_{pi}

electron gyro radius v_{\perp}/Ω_{ce} .

ion gyro radius v_{\perp}/Ω_{ci}

where c is light speed, v_{the} and v_{thi} are respectively the thermal speeds of the electrons and ions, and $v_{\perp} = \vec{v} \cdot \vec{B}/B$.

- By definition,

$$v_{th\alpha} = (k_B T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$$

where k_B is Boltzmann constant in unit of Joule/K, and the temperature T_α is in unit of K.

- If the temperature is written in unit of Joule or eV, then we should remove the Boltzmann constant. The thermal speed becomes $v_{th\alpha} = (T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$.
- The electron inertial length 慣性長度 is also called the skin depth 肌膚深度 of high frequency electromagnetic waves.
- The gyro radius 迴旋半徑 is also called Larmor radius.
注意 radius 的複數為 radii

為何要引進「德拜長度」 Debye Length 這個概念？

德拜長度是德拜遮蔽效應 (Debye shielding effect) 的特徵長度。在遠大於德拜長度的空間尺度中，所能感受到的電荷分離所造成的電場，幾乎為零，這就是 Debye shielding effect。由於電漿中的外加電位差，經過一個德拜長度後，其強度大小會比真空中減少了約 $1/e$ 倍。因此德拜長度是靜電強度遞減的 e-folding length.

假設有一個被絕緣體封住的外加平行電容板，通一定電壓 $\Delta\Phi$ 後，假設左側電容板的位置為 $x = -L/2$ 攜帶電荷 $-Q$ ，右側電容板的位置為 $x = +L/2$ 攜帶電荷 $+Q$ ，則平行電容板之間的電場應該為

$$\vec{E}_0 = (-\hat{x}) \frac{\Delta\Phi}{L} \quad (3.1)$$

若電容板面積為 A ，則電場也可寫為

$$\vec{E}_0 = (-\hat{x}) \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (3.2)$$

故得 $\Delta\Phi = QL/(\epsilon_0 A) = Q/C$ 其中 $C = \epsilon_0 A/L$ 就是電容。至於 $x = -(L/2) \sim +(L/2)$ 之間的電位分佈可以寫成

$$\Phi_0(x) = \frac{\Delta\Phi}{L} x \quad (3.3)$$

若將此平行電容板之間（絕緣體外面），灌入由電子與質子所組成的電漿，個數密度分別為 n_e 與 n_i 。則在平行電容板之間，必須滿足以下 Poisson Equation，

$$-\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

且邊界條件為必須滿足方程式 (3.3)

要解方程式(3.4)，我們必須知道 n_e 與 n_i 它們與電位之間的關係。現在讓我們考慮以下兩種情形。

Case A :

若這些電漿與外加電荷，已經放置了一段時間，如果這段時間遠長於電子的電漿震盪週期，但卻短於質子的電漿震盪週期，則可以假設電子分布已經達到一種平衡態了。也可假設，質子還沒開始動（就是 n_i and \vec{V}_i 都沒有變化）。平衡態的電子分布意味著電子流體的動量方程式中對時間微分項為零

（ $\partial \vec{V}_e / \partial t \approx 0$ ）。如果電子群相對平行電容板的平均速度為零，則電子流體的動量方程式的第二項也是零 $\vec{V}_e \cdot \nabla \vec{V}_e = 0$ 。

因此可得平衡態的電子流體動量方程式

$$-\nabla p_e - en_e \vec{E} = 0 \quad (3.5)$$

其中 $\vec{E} = -\nabla\Phi$ and $p_e = n_e k_B T_e$ 。對電子而言，整個過程緩慢，因此「或許」可以假設為一種等溫過程，因此 $-\nabla p_e = -k_B T_e \nabla n_e$ ，因此方程式 (3.5) 可改寫為

$$-k_B T_e \nabla n_e + e n_e \nabla \Phi = 0 \quad (3.6)$$

移項可得

$$\frac{\nabla n_e}{n_e} = \frac{e \nabla \Phi}{k_B T_e} \quad (3.7)$$

對方程式(3.7)左右積分一次得

$$\ln \frac{n_e}{n_0} = \frac{e(\Phi - 0)}{k_B T_e}$$

或

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right) \quad (3.8)$$

方程式(3.8) 就是電子平衡分布的 Boltzmann Relation。將方程式(3.8)帶入方程式 (3.4)，並假設正離子不動 $n_i = n_0$ ，則方程式 (3.4)可改寫為：

$$\nabla^2 \Phi = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right) - 1 \right] \quad (3.9)$$

為了簡化問題，讓我們考慮 $e\Phi < k_B T_e$ 的情況。（註：如果電子群相對此外加電荷的平均速度為零，則電位能通常小於電漿熱能。如果不幸電位能大於電漿熱能（ $e\Phi > k_B T_e$ ），則很

多電子會被吸附在絕緣體表面，電位會逐漸降低，直到 $e\Phi < k_B T_e$ 為止。) 注意，當 $e\Phi < k_B T_e$ 時，方程式(3.9) 可用泰勒級數展開，並近似為

$$\nabla^2 \Phi \approx \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e} \right) - 1 \right] \approx \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\left(\frac{e\Phi}{k_B T_e} \right) \right] \quad (3.10)$$

在上述平行電容板的環境中 $\nabla = \hat{x}\partial/\partial x$ ，方程式(3.10)可改寫為

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\lambda_{De}^2} \Phi \quad (3.11)$$

其中

$$\frac{1}{\lambda_{De}^2} \approx \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T_e} \quad (3.12)$$

方程式(3.11)的解為

$$\Phi = C_1 \exp\left(\frac{x}{\lambda_{De}}\right) + C_2 \exp\left(\frac{-x}{\lambda_{De}}\right) \quad (3.13)$$

將 方程式(3.3)的邊界條件帶入上式，可得方程式(3.13)的解為

$$-\frac{\Delta\Phi}{2} = C_1 \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) + C_2 \exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) \quad (3.14)$$

以及

$$\frac{\Delta\Phi}{2} = C_1 \exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) + C_2 \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) \quad (3.15)$$

Adding Eq. (3.14) and Eq. (3.15), it yields

$$0 = (C_1 + C_2) \left[\exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) + \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) \right] \quad (3.16)$$

(3.16) yields

$$C_2 = -C_1 \quad (3.17)$$

Subtracting Eq. (3.14) from Eq. (3.15), and then substituting Eq. (3.17) into the resulting equation, it yields

$$\Delta\Phi = 2C_1 \left[\exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) - \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) \right] \quad (3.18)$$

Eq. (3.18) yields

$$C_1 = \frac{\Delta\Phi}{2} \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) - \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) \right]} \quad (3.19)$$

Substituting Eqs. (3.17) and (3.19) into Eq. (3.13), it yields

$$\Phi(x) = \frac{\Delta\Phi}{2} \frac{\left[\exp\left(\frac{x}{\lambda_{De}}\right) - \exp\left(\frac{-x}{\lambda_{De}}\right) \right]}{\left[\exp\left(\frac{L/2}{\lambda_{De}}\right) - \exp\left(\frac{-L/2}{\lambda_{De}}\right) \right]} \quad (3.20)$$

Figure 3.1 shows the results of the electrostatic potential obtained from Eq. (3.3) (red line) and Eq. (3.20) (Blue curve), where x is normalized by λ_{De} , potential is normalized by $\Delta\Phi$, and we choose $L = 10\lambda_{De}$ in this case.

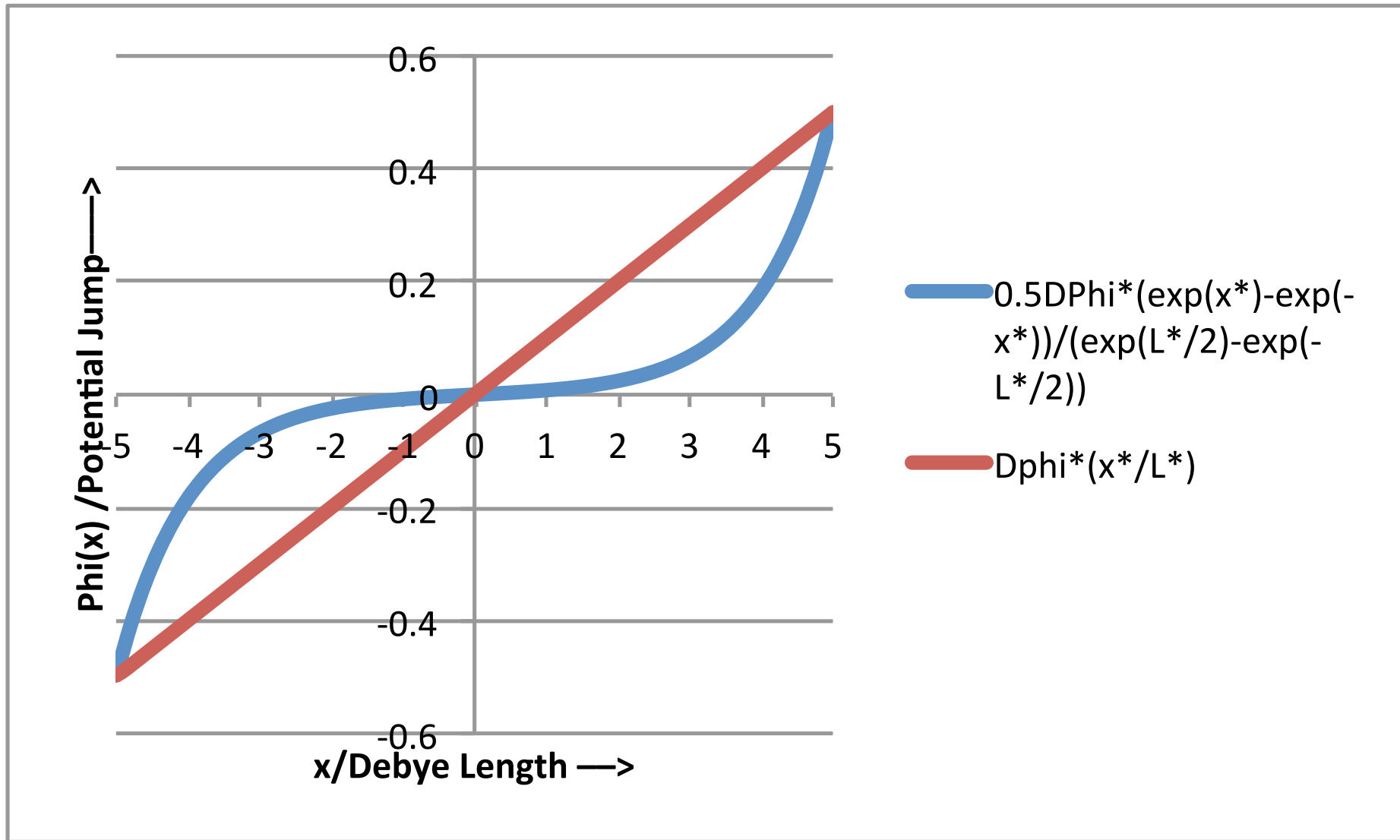


圖 3.1. 平行電容板中 Debye shielding effect 的示意圖。

Case B :

若這些電漿與外加電荷，已經放置了一段時間，如果這段時間遠長於質子的電漿震盪週期，則可以假設電子與質子分布均已經達到一種平衡態了，也都呈現等溫狀態，甚至可假設

$T_i = T_e = T$ 。因此質子流體與電子流體的動量方程式左側，都可以假設為零。因此可由他們的動量方程式得到

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{k_B T}\right) \quad (3.21)$$

$$n_i = n_0 \exp\left(\frac{-e\Phi}{k_B T}\right) \quad (3.22)$$

Substituting Eqs. (3.21) and (3.22) into Eq. (3.4), it yields

$$\nabla^2 \Phi = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\Phi}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{-e\Phi}{k_B T}\right) \right] \quad (3.23)$$

For $e\Phi < k_B T$, and for $\nabla = \hat{x}\partial/\partial x$, Eq. (3.23) yields

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T}\right) - \left(1 - \frac{e\Phi}{k_B T}\right) \right] \approx 2 \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T} \Phi \quad (3.24)$$

Namely, Eq. (3.24) yields

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\lambda_D^2} \Phi$$

where

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = 2 \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 k_B T}$$

Thus, with the help from the ions, the Debye length is reduced by a factor of $\sqrt{2}$ from the Debye shielding length by the electrons alone.

Debye length 在靜電波的研究中，有何重要性？

德拜長度也是許多高頻靜電波波長的上限。此處所指的高頻波，是指頻率遠大於正離子振盪頻率或正離子迴旋頻率的波。一些非線性靜電結構的厚度，也通常接近 Debye Length。這些非線性靜電結構包括了 electrostatic shocks, double layers, and electrostatic sheath.

Debye Cube 與電漿的定義 definition of plasma

電漿是一種游離態氣體。要避免這些游離氣體中的正負電粒子重新結合成中性氣體，電漿的密度必須夠低。溫度必須夠高。可是如果密度太低，可能會無法組成一個具有 **Collective behavior** 的連續體。因此科學家找到一種區分「電漿」與「一團無 **Collective behavior** 之粒子群」的簡單方法。根據這種方法，電漿的密度雖低，但是在一個邊長為德拜長度的立方體中（**Debye Cube**），電漿粒子的數目，必須遠大於一。通常「遠大於一」是指一千以上的數目，越大越好！滿足這個條件的帶電粒子群，才能被稱為電漿。

為何要引進「肌膚深度」**skin depth** 這個概念？

要等介紹高頻電磁波在電漿中的傳播時，才會詳細介紹肌膚深度的概念。這裡只能定性的介紹一下肌膚深度的由來。

當一個高頻電磁波打入一個高密度電漿（密度高到，此電漿所對應的電漿頻率，高於入射波的頻率），經過一個 **skin depth** 後，此高頻電磁波的強度會減少為原來強度的 $1/e$ 倍。因此 **skin depth** 就是此電磁波強度衰退的 **e-folding length**。

有趣的是，如果這個電漿是一個層狀結構，它的厚度如果比這個 **skin depth** 還要薄，則此電漿層只能大幅削弱此入射電磁波的強度，卻無法完全屏蔽阻擋此電磁波的穿透。

為何要引進「慣性長度」inertial length 這個概念？

要等介紹電漿的流體方程式以後，才能詳細介紹有關慣性長度的概念。這裡只能定性的介紹一下慣性長度的由來。

當擾動的尺度遠長於電子或質子的慣性長度時，電子或質子的流體動量方程式中的慣性項就會遠小於 **Lorentz Force** 項，故可忽略不計，為力平衡態。

為何要引進「迴旋半徑」gyro radius 這個概念？

迴旋半徑的概念，在接下來的 Lectures 4-9 中都要用到。此外，未來如果有時間介紹 kinetic plasma physics 時，迴旋半徑的概念也扮演著非常重要的角色，因為不同迴旋半徑的粒子，對於波動電場與波動磁場，都會有不同的反應。

Exercise 3.1.

將一個帶正電 Q 的點電荷，用絕緣體包著，放在一個由電子與質子所組成的電漿中。假設這個絕緣層有一個厚度 D ，已知背景電漿個數密度為 n ，電漿中電子的溫度 T_e 等於質子的溫度 T_i ，而且在距離點電荷 D 處的電位能已經遠小於電漿的熱動能，請「估算」，

(a) 在略小於正離子時間尺度時，能造成 Debye Shielding 的區域，距離絕緣層表面有多遠？

(b) 在 1000 倍正離子時間尺度後，能造成 Debye Shielding 的區域，距離絕緣層表面有多遠？

Exercise 3.1(a) 解答 (Exercise 3.1 的結果完全滿足 e-folding 的定義。可是 Exercise 3.1 的數學較難，但是物理意義與前面的平行電容板實驗結果類似。只是平行電容板實驗結果要達到 e-folding 的電位降落需要略長一點的距離。)

先看點電荷 Q 產生的電場與電位分佈

各位可能「背」得出答案

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = E_{0r} \hat{r}$$
$$\Phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

證明這兩個式子的方式如下。

這個由點電荷 Q 產生的電場與電位，將被當作邊界條件來使用。位在絕緣體邊緣處的電位為

$$\Phi_0(r = D) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D}$$

依照題意，

$$e\Phi_0(r = D) = \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 D} \ll k_B T_e$$

另一個邊界條件就是 $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ，

高斯定律

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

對上式等號兩邊相對以點電荷為圓心，半徑為 r 的空間中做體積分，

$$\iiint_{Vol.(S)} \nabla \cdot \vec{E}_0 dx^3 = \iiint_{Vol.(S)} \frac{\rho_c}{\epsilon_0} dx^3$$

再利用 **Gauss Law** 將等號左邊的體積分改為封閉的面積分，可得

$$\oiint_{S(Vol.)} \vec{E}_0 \cdot d\vec{a} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

故得

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = E_{0r} \hat{r}$$

再根據定義

$$\vec{E}_0 = -\nabla\Phi_0 = -\hat{r} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}$$

可得

$$\Phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

可滿足以上兩式。

根據 Debye shielding 的定義，我們「希望證明」

$$\Phi(r) = \Phi_0 e^{-r/\lambda_{De}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_{De}}$$

其中 $\lambda_{De}^2 = \epsilon_0 k_B T_e / n e^2$ ，這顯示

$$r\Phi(r) = r\Phi_0 e^{-r/\lambda_{De}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/\lambda_{De}}$$

為了方便起見，我們可以令 $\psi(r) = r\Phi(r)$ 則上式可改寫為

$$\psi(r) = \psi_0 e^{-r/\lambda_{De}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/\lambda_{De}}$$

所以我們「希望能先證明」

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2} \psi(r)$$

因為這道式子的通解為

$$\psi(r) = \psi_- e^{-\frac{r}{\lambda_{De}}} + \psi_+ e^{+\frac{r}{\lambda_{De}}}$$

其中等號右邊第二項，隨距離增加而增大，不滿足 $\Phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ 這個邊界條件，因此 $\psi_+ = 0$ 。 $\psi(r)$ 符合我們想要找的答案。

考慮 Poisson equation

$$-\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}$$

將 $-\nabla^2 \Phi$ 以球對稱的球面座標表示為

$$-\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right)$$

將 $\Phi(r) = \psi(r)/r$ 帶入上式，上式可改寫為

$$-\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{r} \frac{d^2 \psi}{dr^2}$$

Poisson equation 中的正離子密度與電子密度怎麼算呢？

如果考慮時間尺度差不多等於或略小於正離子時間尺度，但遠大於電子的時間尺度，則我們可以假設正離子不動，因此正離子密度等於背景電漿密度

$$n_i = n$$

我們可以進一步假設電子流體已經達到平衡態了，「令」電子流體的平均速度為零，且電子的溫度在空間中沒有變化（如果不滿足這兩個條件，以下的結果就需要修正），則

$$-\nabla p_e - en_e \vec{E} = 0$$

也就是

$$-k_B T_e \nabla n_e + en_e \nabla \Phi = 0$$

上式可改寫為

$$\frac{\nabla n_e}{n_e} = + \frac{e \nabla \Phi}{k_B T_e}$$

上式積分，取 $\Phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ 處， $n_e = n$

則電子的密度分佈將會滿足 Boltzmann distribution:

$$n_e = n e^{e\Phi/k_B T_e}$$

若 $e\Phi \ll k_B T_e$ ，則電子密度分佈可以進一步近似為

$$n_e \simeq n \left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e} \right)$$

將

$$n_i = n$$
$$n_e \simeq n \left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e} \right)$$

帶入 Poisson Equation 可得

$$-\nabla^2 \Phi = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = -\frac{e}{\epsilon_0} n \frac{e\Phi}{k_B T_e}$$

考慮球面對稱可得

$$-\nabla^2\Phi = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{e}{\epsilon_0}n\frac{e\Phi}{k_B T_e}$$

令 $\psi(r) = r\Phi(r)$ ，上式可改寫為

$$-\frac{1}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} = -\frac{e^2n}{\epsilon_0 k_B T_e}\frac{\psi}{r}$$

或

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{e^2n}{k_B T_e \epsilon_0}\psi$$

前面說，我們「希望能先證明」

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{1}{\lambda_{De}^2}\psi(r)$$

這樣就可以得到 Debye length λ_{De}

兩相比較可知，我們可以令

$$\lambda_{De}^2 = \frac{k_B T_e \epsilon_0}{e^2 n} = \frac{v_{the}^2}{\omega_{pe}^2}$$

則

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} = \frac{e^2 n}{k_B T_e \epsilon_0} \psi = \frac{1}{\lambda_{De}^2} \psi$$

解得

$$\psi(r) = \psi_0 e^{-r/\lambda_{De}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/\lambda_{De}}$$

亦即

$$\Phi(r) = \frac{\psi(r)}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_{De}}$$

其中

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e \epsilon_0}{e^2 n}}$$

DEBYE SHIELDING EFFECT

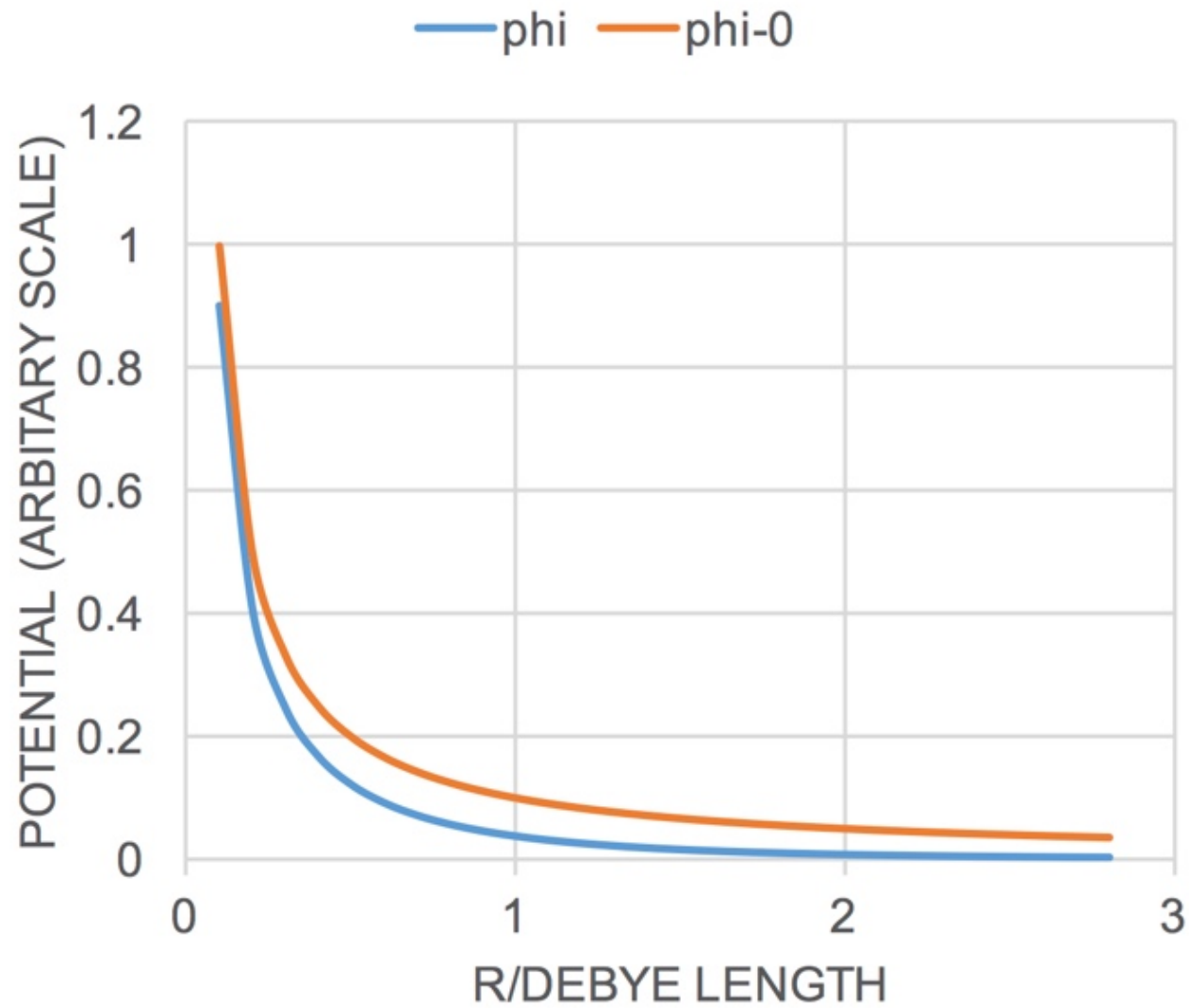


圖 3.2. Debye shielding effect 的示意圖。被絕緣體包覆的點電荷，放置於真空中所產生的電位分布（紅色曲線）與放置於電漿中的電位分布（藍色曲線）。受到 Debye shielding effect 的影響，在 Debye Length 以外的藍色曲線之電位大幅減小，因此與無窮遠處的電位差減小，這顯示在 Debye Length 以外的電場非常小，可以忽略不計。