

力學報告

〈陀螺儀的原理及應用〉

107601528

大氣 2B 徐嘉鎡

〈目錄〉

(一) 陀螺儀歷史

(二) 陀螺儀原理

角動量守恆

進動與章動

(三) 陀螺儀應用

傳統陀螺儀(機械式陀螺儀)

現代陀螺儀(雷射陀螺儀、光纖陀螺儀、MEMS 陀螺儀)

(四) 參考資料

(一) 陀螺儀歷史

在介紹陀螺之前先講述陀螺儀的歷史。1852 年，法國的物理學家萊昂·傅科為了研究地球自轉，首先發現高速轉動中的轉子，由於慣性作用(角動量守恆)它的旋轉軸永遠指向一固定方向^[1]。1860 年代後，電動馬達的演進使得陀螺儀能夠無限旋轉，進而誕生了第一組航向指示器的原型，當作船隻、飛機和導彈穩定方向的信號來源。我們可以透過陀螺儀的信號，控制船隻及飛機的姿態，穩定的航行。

到了現在 21 世紀，陀螺儀的製造成本降低，使得原本只在飛機、導彈上存在的陀螺儀逐步民用化，也從機械結構邁入電子時代，使用的原理也不盡相同，例如：光學原理或電磁原理。隨著智慧型手機產業的進步，陀螺儀的體積不斷縮小，也帶動了小型無人機的發展。

(二) 陀螺儀原理

角動量守恆：

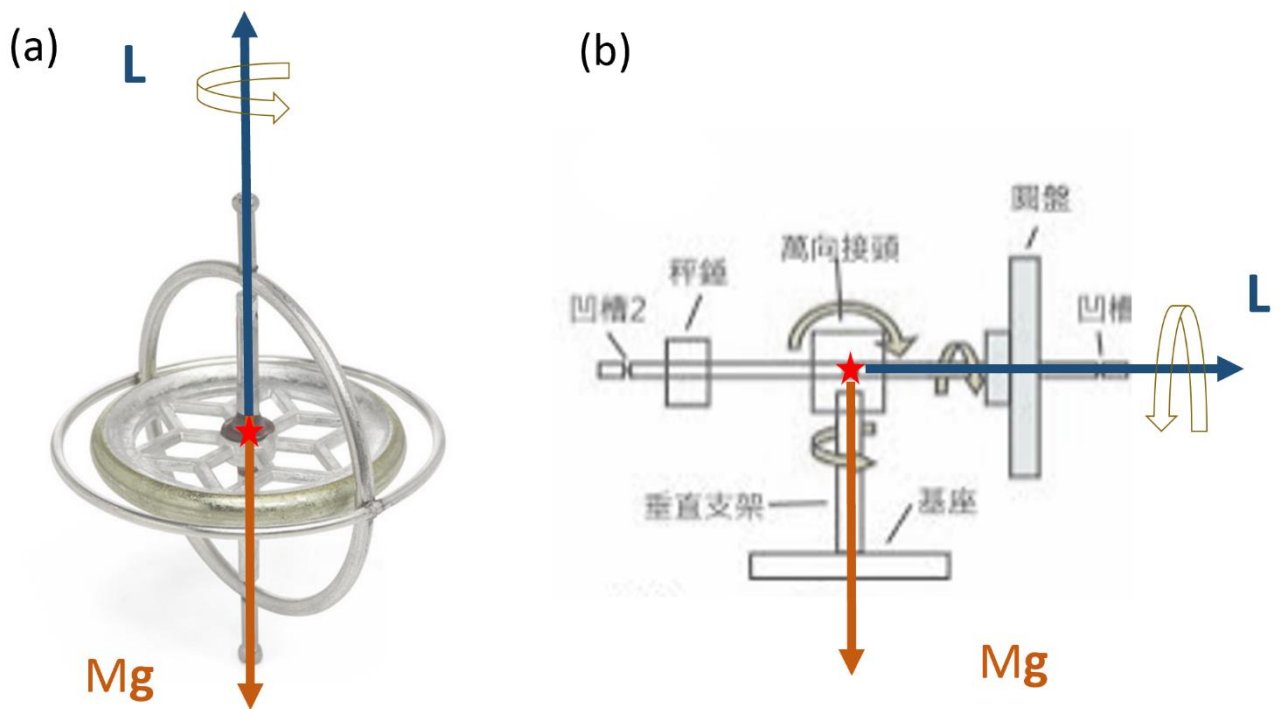
在介紹陀螺儀時，我們先知道兩個公式：

$$\text{角動量: } \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (\mathbf{p} = m \mathbf{v}) \quad (1)$$

$$\text{力矩: } \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (2)$$

根據(2)可知，若無外力矩，則剛體的角動量為常數，即剛體的角動量不變，這就是「角動量守恆原理」。(圖一)為(a)、(b)兩種陀螺儀，(a)是垂直立在桌面上旋轉，取其重心為支點，則重力及桌面施加的正向力都在力臂 $\mathbf{r}$ 的方向上，根據(1)式重力及正向力產生的力矩為 0。(b)是水平立在桌面上旋轉，它的重心必在中間的軸上，否則放置於桌面時，(b)會傾斜一邊。取其重心為支點，重力及桌面施加的正向力同(a)都在力臂 $\mathbf{r}$ 的方向上，產生的力矩也為 0。

由此可知，作用在(a)和(b)的外力產生的力矩為 0(不考慮摩擦)，根據角動量守恆，(a)和(b)的角動量不變，因此(a)和(b)的自轉軸會一直保持在空間中固定方向旋轉，此為陀螺儀的「定軸性」。



(圖一) [2]

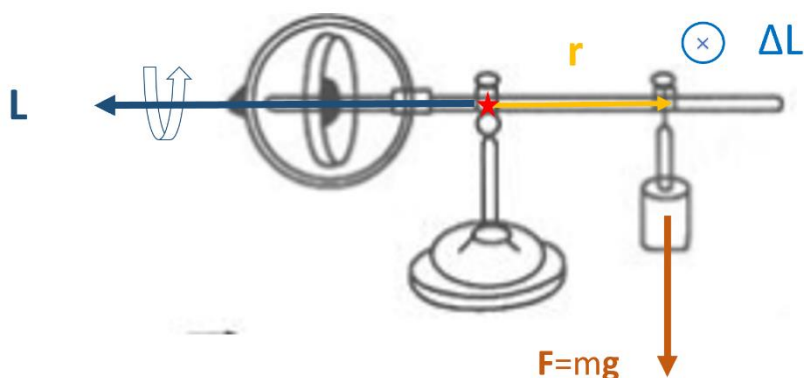
進動與章動：

現在我們在(b)的陀螺儀後端加一質量為 m 的砝碼，如(圖二)。此砝碼的重力會產生一個力矩 $\boldsymbol{\tau}$ ，產生的角動量為 $\Delta\mathbf{L}$ 。根據 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 我們知道 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向為入紙面方向。我們

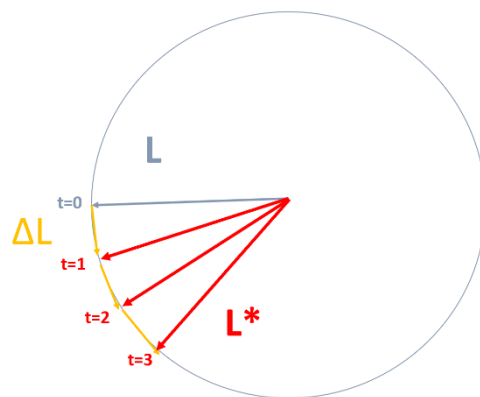
又可以把(2)式寫成 $\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t}$ ，當 Δt 很小時，

$$\Delta\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} \Delta t \quad (3)$$

可知 ΔL 與 τ 同向。此時角動量的方向改變，新的角動量 L^* 方向為 L 與 ΔL 的向量和方向， $L^* = L + \Delta L$ ，此為陀螺儀的「逆動性」。



(圖二)^[3]



(圖三)

因為砝碼一直掛在陀螺儀上， L^* 又會受到 ΔL 的影響繼續改變方向變成新的 L^* ，如(圖三)，因此我們會看到(圖二)的陀螺儀會旋轉(轉子先從左邊轉入紙面，再從右邊轉出紙面)，以(圖三)來看則是 L^* 隨時間往逆時針方向改變，轉子朝逆時針旋轉，這就是陀螺儀的「進動」現象。

取一段很短的時間，則 $L^* = L + \Delta L$ 可看成是直角三角形(圖四)。當 $\Delta\theta$ 很小時，

$$\frac{\Delta L}{L} \cong \Delta\theta, \Delta L \text{ 用(3)帶入:}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\tau \Delta t}{L} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\tau}{L} = \Omega \text{ (進動角速率)} \quad (5)$$

(5)式告訴我們當陀螺轉速因摩擦逐漸變慢時，角動量變小，進動角速率變大，陀螺進動越快。

$$\tau = r \times F, \tau = r(mg)$$

將(4)寫成d/dt型式:

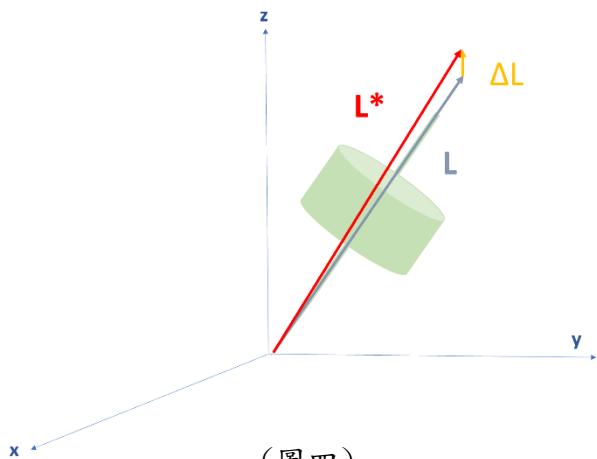
$$d\theta = \frac{dL}{L}, dL = Ld\theta$$

$$\tau = \frac{dL}{dt}, dL = \tau dt = r(mg)dt = Ld\theta$$

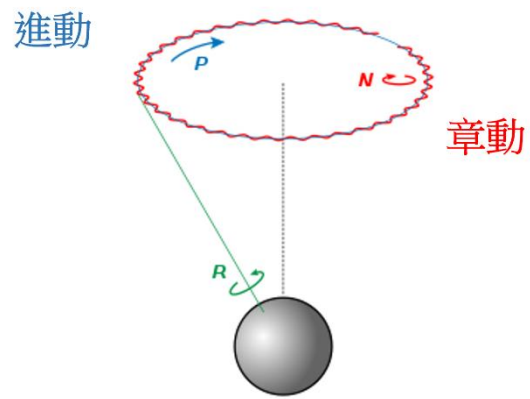
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{rmg}{L} = \frac{rmg}{I\omega} = \frac{rmg}{(Cmr^2)\omega} = \frac{rg}{Cr^2\omega} \quad (6)$$

對任意行裝的陀螺來說其轉動慣量 I 可以寫成 Cmr^2 ，由(6)式知陀螺進動的現象與陀螺本身的質量無關。

當陀螺在進動過程中受到一小擾動，產生 z 方向的 ΔL ，如(圖四)。新的 $L^* = L + \Delta L$ ，就不在原本的自轉軸上了，此陀螺就會像垂吊著的彈簧彈簧受到小擾動一樣，不停上下晃動，就是陀螺儀的「章動」現象(圖五)。



(圖四)



(圖五)^[4]

(三) 陀螺儀應用

根據陀螺儀的「定軸性」及「逆動性」，陀螺儀被廣泛應用於我們的生活。定軸性是指若不受外力，陀螺儀不會偏離轉軸所指方向。導彈或是飛機就能透過陀螺儀的定軸性來訂定飛行方向，即使天氣狀況不好四周看不清都能順利航行至目的地。而逆動性則是當陀螺儀受到外力矩作用時，會產生進動的現象，這個進動的現象會藉由感測器產生訊號，計算這個訊號對應的進動角速率可以判斷設備偏轉的角度，來進行調整。飛行在高空中的飛機要穩定機身，就可以根據逆動性傳出的訊號進行飛行姿態調整。

傳統陀螺儀(機械式陀螺儀)

以飛機上的陀螺儀為例：

1. 方向陀螺指示儀（航向儀）^[5]

藉由陀螺自身的定軸性來指示飛機飛行的方向，並且可做為精確轉彎的指示參考。轉彎時利用齒輪帶動儀表板上刻度的轉變，但陀螺儀的方向仍舊保持不變。然而陀螺儀與儀表板之間的齒輪會產生一外力矩，造成進動，因此每 15 分鐘需要一次人工校正。

2. 水平陀螺指示儀（姿態儀）^[6]

根據陀螺儀的定軸性，儀表板中的水平桿和側滾指針可保持不動，而儀表板外殼和殼上的小飛機以及側滾刻度盤，會隨著飛機的飛行姿態而改變。在指示儀的儀表板上會顯示飛機的狀態(pitch, roll or bank)。藉由判讀儀表板能知道飛機當下的狀態，並予以調整。

3. 轉彎傾斜指示儀（轉彎側滑儀）^[7]

一種速率陀螺儀。利用陀螺的進動性，來指示飛機轉彎時的速率。當速率為兩分鐘迴轉一圈時，會依照它的進動方向在儀表板上偏離一個刻度。兩分鐘迴轉一圈是最舒適的轉彎速率，若超過刻度則必須做轉彎速率挑整。在轉彎儀既能反映側傾(yaw)也能反映偏轉(roll)。

※更多相關資訊，參考此影片 <https://www.youtube.com/watch?v=hVsx4XWafXg>

現代陀螺儀^[8]

現代應用在手機及無人機中的陀螺儀因追求體積小且輕薄，早已不是傳統的機械式陀螺儀，而是透過光學及電磁學的方式來運作。不過因其功能與傳統陀儀一樣是用於穩定物體及計算角度差，因此還是稱作陀螺儀。

1. 環形雷射陀螺儀 (RLG)

利用 Sagnac 效應，計算在整個設備旋轉之下，不同方向的雷射光之間會因為路徑不同而產生相位差，藉由感測此相位差得知整個設備的角度變化。

2. 光纖陀螺儀 (FOG)

利用 Sagnac 效應，基本上與 RLG 相似，不同的地方在於它使用多線圈，使的每個效果多次複合，藉此提升角度變化的靈敏度。

3. MEMS 陀螺儀 (MEMS)

是一種結合了機械振動和科氏力的電子陀螺儀。電容模塊與另一個模塊以固定的相位反相振盪。隨著設備旋轉，模塊產生相位差，模塊的科氏力會沿相反的方向略微地移動它們，這會下方的電容產生感應，藉此以測量物體的總體角速度。

(四) 參考資料

[1] <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%99%80%E8%9E%BA%E5%84%80>

[2] <https://www.ty53.com/lore/zrasn.html>

[3] <http://ntour.ntou.edu.tw:8080/ir/bitstream/987654321/41392/2/228.pdf>

[4] <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AB%A0%E5%8B%95>

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Attitude_indicator

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Heading_indicator

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Turn_and_slip_indicator

[8] <https://www.ceva-dsp.com/ourblog/exploring-the-application-of-gyroscopes/>