

力學
期末書面報告

證明克卜勒第一定律及
模擬衛星軌道

107601524 許心蘋

2020.05.28

(一) 證明克卜勒第一定律

克卜勒第一定律定義為行星軌道是一個以恆星為焦點的橢圓。

藉由證明由橢圓軌道的 θ 方向的運動方程和由牛頓第二定律推導的 θ 方向的行星運動方程是否相同來證明克卜勒第一定律是正確的。

1-1 由橢圓定義式推導 θ 方向運動方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

假設橢圓離心率為 ϵ ，左右焦點 F' 與 F 位在 $(x = -\epsilon a, y = 0)$, $(x = \epsilon a, y = 0)$

已知一點位在 $x = 0, y = b$ ，因任兩焦點距離 $= r' + r = 2a$ 得到

$$b^2 + \epsilon a^2 = a^2, \quad b^2 = (1 - \epsilon^2) a^2$$

以右側 F 為新原點，橢圓邊上一點與 F 的連線為 r ，連線與 x 軸的夾角為 θ

建立極座標

$$x = r \cos \theta + \epsilon a, \quad y = r \sin \theta$$

橢圓可以寫成

$$\frac{(r \cos \theta + \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{(r \sin \theta)^2}{(1 - \epsilon^2) a^2} = 1$$

$$(r \cos \theta + \epsilon a)^2 (1 - \epsilon^2) + (r \sin \theta)^2 = (1 - \epsilon^2) a^2$$

整理過後可以解出 r

$$[r + \epsilon \cos \theta r - (1 - \epsilon^2) a^2][r - \epsilon \cos \theta r + (1 - \epsilon^2) a^2] = 0$$

$$r = \frac{(1 - \epsilon^2) a}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad \text{or} \quad r = \frac{-(1 - \epsilon^2) a}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

因橢圓離心率介於 0 到 1 之間

$$r = \frac{(1 - \epsilon^2) a}{1 - \epsilon \cos \theta}$$

1-2 找出 $r(\theta)$ 的微分方程

由於 $r = \frac{(1-\epsilon^2)a}{1-\epsilon\cos\theta}$ 的 θ 在分母不好進行微分, 令 $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$ 帶入 r

$$u(\theta) = \frac{1 + \epsilon\cos\theta}{(1-\epsilon^2)a}$$

$$\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = \frac{-\epsilon\cos\theta}{(1-\epsilon^2)a} = -u(\theta) + \frac{1}{(1-\epsilon^2)a}$$

$$\frac{d^2(\frac{1}{r(\theta)})}{d\theta^2} + \frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a}$$

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} = \frac{d}{d\theta} \left[\left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{dr}{d\theta} \right] + \frac{1}{r}$$

$$\left(\frac{2}{r^3} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a}$$

1-3 由行星運動方程推 θ 方向運動方程

由牛頓第二定律

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= m \{ (\ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta}) + [(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})] \} \\ &= m [\hat{r}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \hat{\theta}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})] \end{aligned}$$

\hat{r} component yields

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$$

$\hat{\theta}$ component yields

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

在中心力的作用下, 角動量守恆, 下面解釋角動量守恆原因

行星繞著恆星轉的角動量為 $\vec{L} = mr^2\dot{\theta} \hat{z}$, 中心力為 $\vec{F} = \hat{r}F_r$

由角動量時變率我們可以得出角動量守恆這個結論

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \hat{r}r \times \hat{r}F_r = 0$$

牛頓萬有引力： $\vec{F} = \hat{r}F_r = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$

由於V滿足 $\vec{F} = -\nabla V$ 代表力為保守力，我們可以寫出下式

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

並能將 \hat{r} 的式子寫成 $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2}$

1-4 找出 $r(\theta)$ 的微分方程

此時令 $r(t) = r(\theta(t))$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \dot{\theta} + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \\ &= \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \right] \dot{\theta} + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

帶入 \hat{r} 方向的運動方程式

$$m \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \right) - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r^2}$$

帶入 $\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$, $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$, $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{L_z}{mr^2}\right)^2$

$$\left[\frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{d^2r}{d\theta^2} + r \right] \left(\frac{L_z}{mr^2} \right)^2 = \frac{GM}{r^2}$$

$$\left(\frac{2}{r^3} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L_z^2}$$

1-5 比對兩種微分方程

$$\left(\frac{2}{r^3} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)a} \quad \text{橢圓推導結果}$$

$$\left(\frac{2}{r^3} \right) \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L_z^2} \quad \text{牛頓第二定律推導結果}$$

由此可見兩者的微分方程一致，所以可知行星運動軌道為橢圓，亦得到克卜勒第一定律的結論。

(二)運用 Python 模擬衛星軌道 [1]

我們透過 vpython 這個第三方程式，定義出 G, M, m, E, L_z, dt 帶入程式，找出每一瞬間的 $r(t), \theta(t)$ 來模擬軌道。

2-1 繪出軌道

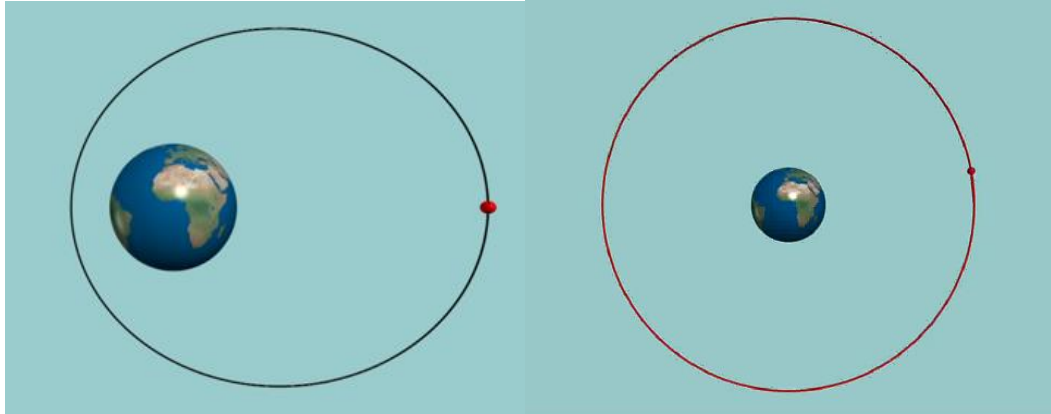
以下為我們的程式碼，

此為整個程式大綱，另外

橢圓軌道會設定初速為 $0.7v_0$ ，正圓軌道則會設定初速為 v_0

```
1 import vpython # 引用套件vpython
2 """
3 1. 參數設定、設定變數、定義萬有引力公式
4 """
5 G = 6.67*10**(-11) ; M = 6*10**24 ; m = 1000
6 Re = 6.4*10**6 ; H = 2.19*10^7 ; t = 0 ; dt = 1
7 v0 = (G*M/H)**0.5
8
9 def Fg(x): # 定義公式
10     return -G*M*m/(x**2)
11 """
12 2. 畫面設定
13 """
14 # 設定視窗
15 scene = canvas(align='left', title='橢圓軌道', width=800, height=600, center=vector(0, 0, 0), background=vector(0.6, 0.8, 0.8))
16 # 地球
17 earth = sphere(pos=vec(0, 0, 0), radius=Re, texture=textures.earth)
18 # 衛星
19 star = sphere(pos=vec(H,0,0), radius=0.1*Re, color=color.red, make_trail=True)
20 starv = vector(0, v0, 0) # 設定衛星初速
21 starv = vector(0, 0.7*v0, 0)
22
23 """
24 3. 執行迴圈
25 """
26 while True: # 執行迴圈
27     rate(5000)
28     dist = ((star.pos.x-earth.pos.x)**2+(star.pos.y-earth.pos.y)**2+(star.pos.z-earth.pos.z)**2)**0.5 # 距離純量
29     radiavector = (star.pos-earth.pos)/dist # 距離單位向量
30     Fg_vector = Fg(dist)*radiavector # 萬有引力向量=萬有引力量值×單位向量
31
32     starv += Fg_vector/m*dt # Δv = F/m *dt
33     star.pos = star.pos + starv*dt # S = S0 + v *dt
34     t = t+dt
35     # 找出衛星上下左右四個端點位置
36     if pre_star_pos.x > pre_pre_star_pos.x and pre_star_pos.x > star.pos.x :
37         print (star.pos) # 顯示右端點
38     if pre_star_pos.x < pre_pre_star_pos.x and pre_star_pos.x < star.pos.x :
39         print (star.pos) # 顯示左端點
40     if pre_star_pos.y > pre_pre_star_pos.y and pre_star_pos.y > star.pos.y :
41         print (star.pos) # 顯示上端點
42     if pre_star_pos.y < pre_pre_star_pos.y and pre_star_pos.y < star.pos.y :
43         print (star.pos) # 顯示下端點
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
```

以下為我們模擬橢圓與正圓軌道圖



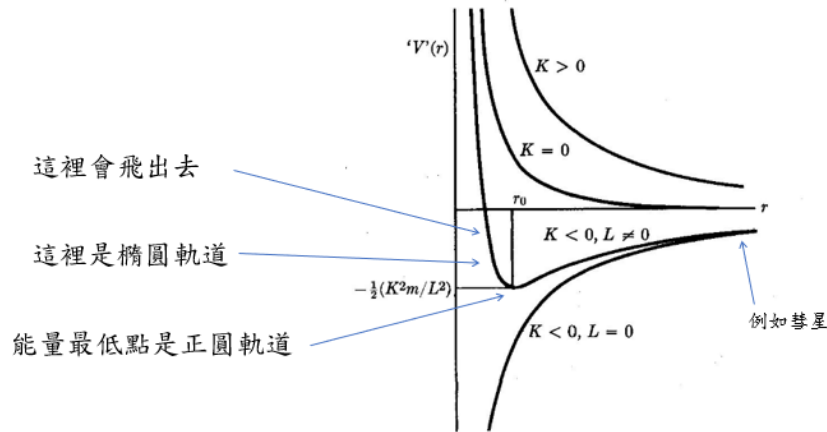
但由於我們使用的數值分析方法為尤拉方法(Euler's method)，當時間拉長後，我們的軌道會產生偏移誤差，因此我認為以後可以嘗試其他的特殊數值法來進行模擬，以減少這種誤差。

下圖為偏差圖



2-2 橢圓與正圓軌道與虛擬位能的關係

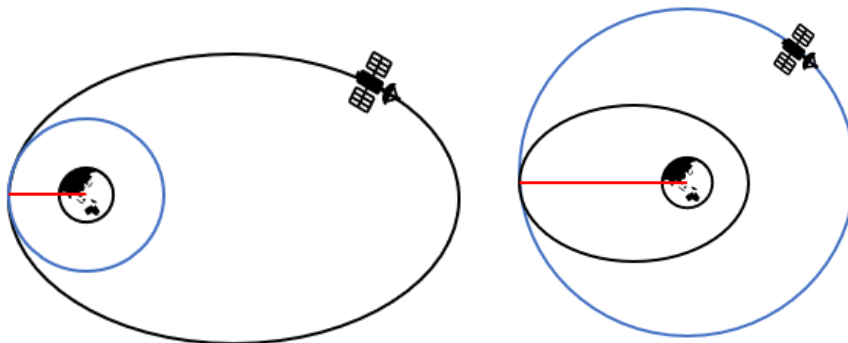
由下圖[2]



我們知道當能量在最低點時會為正圓軌道，能量太高時則會飛出去。

$$\begin{aligned} \text{已知 } m\ddot{r} &= -\frac{dV'(r)}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} + mr\left(\frac{L_z}{mr^2}\right)^2 \\ &= -\frac{GMm}{r^2} + \frac{mV_y^2}{r} \end{aligned}$$

我們計算兩種軌道的虛擬位能，發現由於正圓選用的半徑不同而產生兩種不同的虛擬位能。



由上(左)圖，我們計算後得到在使用橢圓的近地點畫圓時，橢圓的虛擬位能會大於正圓。

由上(右)圖，則會得到橢圓的虛擬位能會小於正圓的結果，而我們模擬軌道的程式即為使用此種方式。

References

- [1] <http://coding.nutc.edu.tw/student/lesson/D05/>
- [2] <https://archive.org/details/Mechanics>