力學書面報告

# **1D Wave Equation 推導 - 以繩波為例**

105601028 程芝儀

## 何謂波動方程？

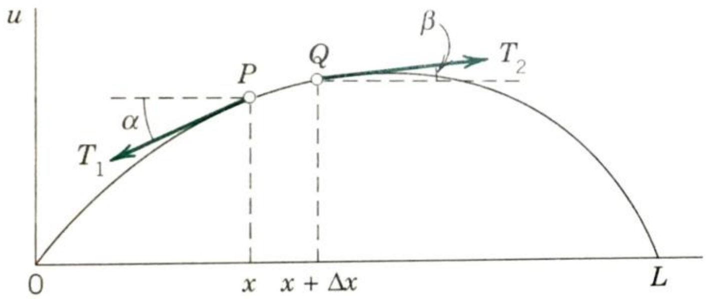
波動方程，是用於描述自然界中各種波動現象的偏微分方程式。
已知 1D wave equation 可表達為如下形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

在繩波 (橫波 transverse wave) 中，c 為常數，*u(x,t)* 為鉛直方向位移量 *x* 和時間 *t* 的函數。

## 推導 1D wave equation

1. 前提假設
   以繩波為例，擷取繩上一小段$\overline{PQ}$，*T* 為繩張量。假設繩為均質，其密度為 $\rho$ (單位質量/長度)；繩的張力 *T* 夠大，足以忽略重力影響；並將繩上質點視為只在鉛直方向運動。




[1]

2. 推導過程
   由 *F=ma*，其中 *F* = 張力 ; $m = \rho\Delta x$ ; $a = \partial^2 u/\partial t^2$。所以我們可以把水平和鉛直方向的運動分別表示為：

$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$$

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(1)

由 (1) 式，將上式代入下式，可得到：

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(2)

此時， *tanα*、*tanβ* 分別為繩波在 x 及 *x+Δx* 處的斜率，因為 *u* 是 *x* 和 *t* 的函數，所以在這邊寫成偏微分的形式：

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x}$$

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x}$$

(3)

將 *tanα*、*tanβ* 代入 (2) 式：

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(4)

當 Δx 趨近於 0 時，可求得繩上某處的偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(其中$c^2$ =*T/ρ*)

## 參考資料


[1] Advanced Engineering Mathematics 10th Edition, Eewin Kreyszig

[2]https://ocw.chu.edu.tw/pluginfile.php/886/mod_resource/content/38/Summary_284.pdf