

第十三章 曲線擬合與插值法

本章學習目標

- 認識曲線擬合與插值法
- 學習 n 階多項式的擬合方法
- 學習各種插值方法與其應用
- 學習散佈式資料點的插值法



曲線擬合

- 曲線擬合(curve fitting)係利用最小平方法，求出最能表示出資料 "趨勢" 的函數
- Matlab是以polyfit()來進行多項式的曲線擬合
- polyfit() 擬合的結果是一個列向量，代表多項式的係數

表 13.1.1 多項式曲線擬合函數

函 數	說 明
<code>polyfit(x,y,n)</code>	分別以資料點的橫座標 x 與縱座標 y 所組成的向量，進行 n 階多項式的擬合。 <code>polyfit()</code> 會回應一個列向量 $[p_n, p_{n-1}, \dots, p_1, p_0]$ ，代表多項式 $p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$
<code>polyval(p,a)</code>	計算多項式 $p(x)$ 於 $x=a$ 的值。 a 可以為一個純量或向量



曲線擬合的範例

```
>> y=primes(50);
```

```
>> x=1:length(y);
```

①

```
>> plot(x,y,'o')
```

```
>> p1=polyfit(x,y,1)
```

```
p1 =  
    3.4036   -5.3619
```

②

```
>> f1=polyval(p1,x);
```

```
>> plot(x,y,'o',x,f1,'-')
```

```
>> p2=polyfit(x,y,2)
```

```
p2 =  
    0.0907    1.9517   -1.2484
```

```
>> f2=polyval(p2,x);
```

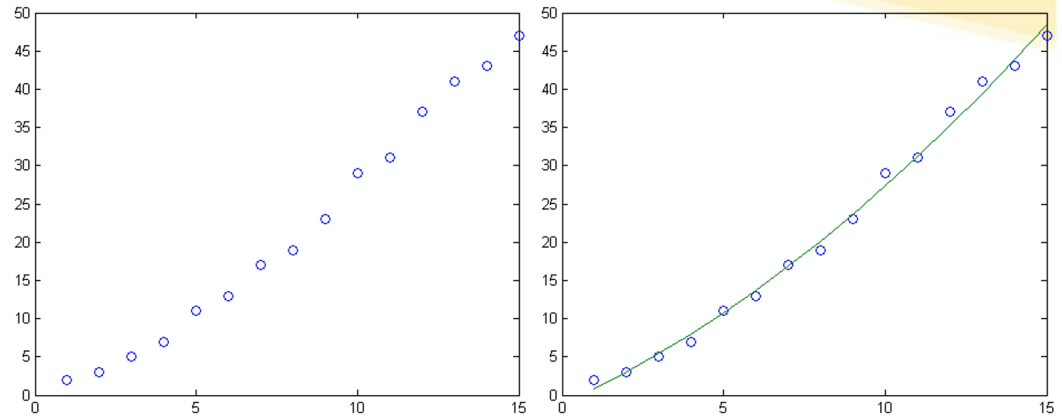
③

```
>> plot(x,y,'o',x,f2,'-')
```

```
>> f3=polyval(polyfit(x,y,3),x);
```

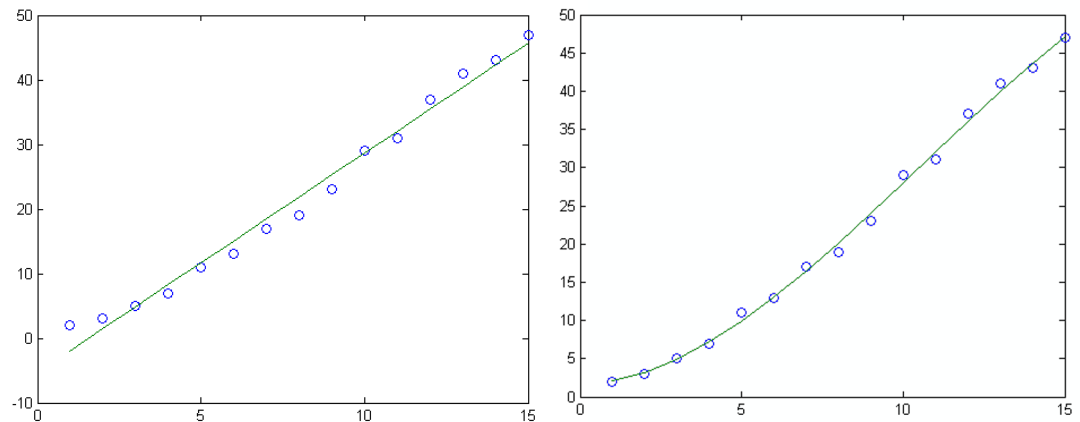
④

```
>> plot(x,y,'o',x,f3,'-')
```



①

③



②

④

一維插值法

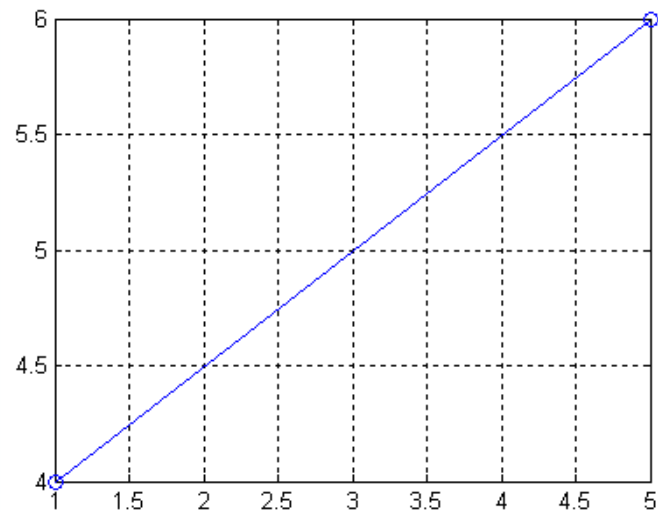
- 一維資料點的插值，可用 **interp1()** 函數
- interp是interpolation的縮寫，而後面所接的1代表一維插值

表 13.2.1 一維插值法

函 數	說 明
<code>interp1(x,y,x_i, 'method')</code>	已知資料數據橫座標 x 與縱座標 y 所組成的向量，以所指定的方法，求解插點 $x = x_i$ 時所相對應的 y_i 之值。其中 <i>method</i> 可為 nearest: 鄰近點插值法 linear: 線性插值法（預設值） spline: spline （雲形線）插值法 cubic: 三次多項式插值法
<code>interp1(x,y,x_i, 'method', 'extrap')</code>	同上，但以外插來計算

一維插值法的範例 (1/2)

```
>> interp1([1 5],[4 6],2,  
            'nearest')  
ans =  
>> plot([1 5],[4,6],'-o');  
grid on
```

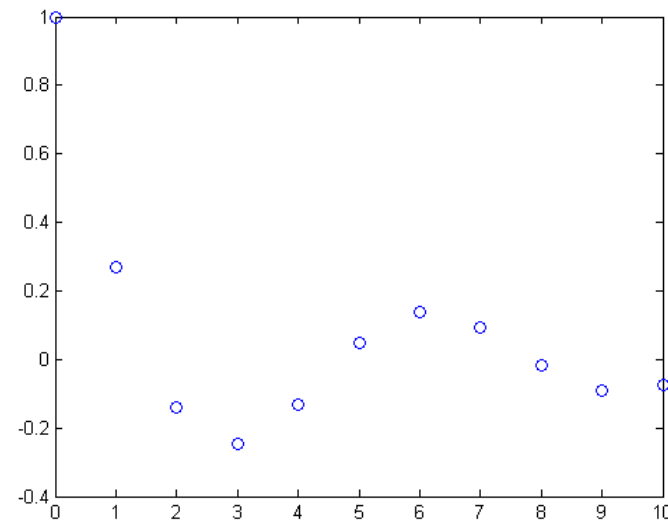


```
>> interp1([1 5],[4 6],2,  
            'linear')  
ans =  
4.5000
```

```
>> interp1([1 5],[4 6],5.2,'linear')  
ans =  
NaN
```

```
>> interp1([1 5],[4 6],5.1,...  
            'linear','extrap')  
ans =  
6.0500
```

```
>> x=0:10;  
>> y=cos(x)./(1+x);  
>> plot(x,y,'o')
```

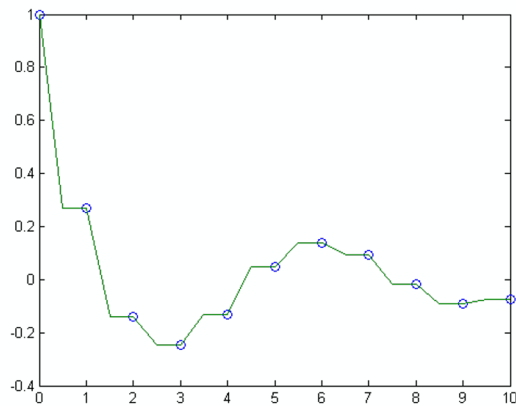


一維插值法的範例 (2/2)

```
>> xi=0:0.5:10;
```

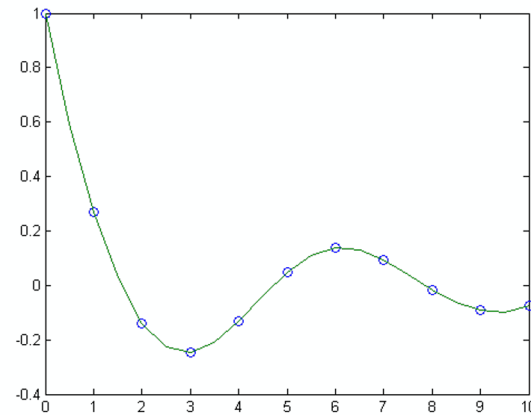
```
>> y0=interp1(x,y,xi,'nearest');
```

```
>> plot(x,y,'o',xi,y0,'-')
```



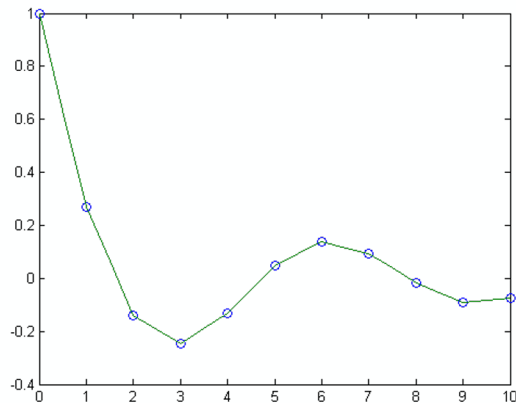
```
>> y2=interp1(x,y,xi,'spline');
```

```
>> plot(x,y,'o',xi,y2,'-')
```



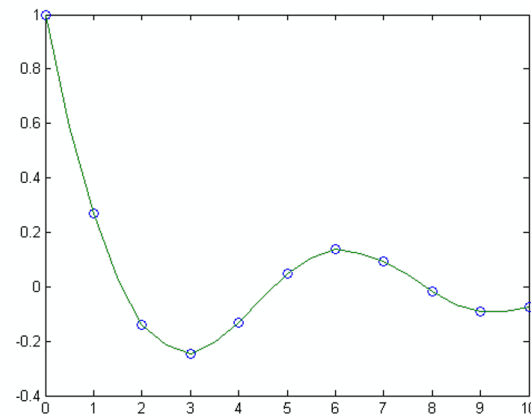
```
>> y1=interp1(x,y,xi,'linear');
```

```
>> plot(x,y,'o',xi,y1,'-')
```



```
>> y3=interp1(x,y,xi,'cubic');
```

```
>> plot(x,y,'o',xi,y3,'-')
```



二維平面的插值法

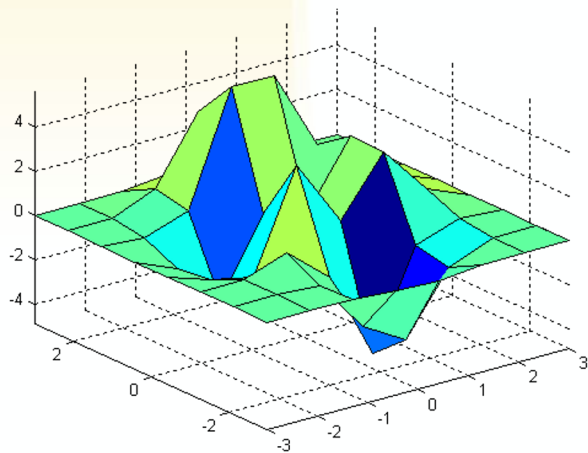
- 如果知道資料點 x 與 y 的座標與其相對應的 z 值，則可使用 `interp2()` 函數進行內插

表 13.2.2 二維插值法

函 數	說 明
<code>interp2(x,y,z,x_i,y_i, 'method')</code>	已知資料數據橫座標 x 與縱座標 y 所組成的向量，以及高度 $z = f(x,y)$ ，以所指定的方法求解 $x = x_i$ 與 $y = y_i$ 時所相對應的 z_i 之值。其中 <i>method</i> 可為 nearest: 鄰近點插值法 linear: 線性插值法（預設） spline: spline 插值法 cubic: 三次多項式插值法
<code>interp2(x,y,z,x_i,y_i, 'method', val)</code>	同上，但是當插點落在數據範圍之外時，則插值的結果設定為 <i>val</i>

二維插值法的範例 (1/2)

```
>> [x,y,z]=peaks(8);  
>> surf(x,y,z);axis tight
```



```
>> zz=peaks(1,1)
```

```
zz =  
2.4338
```

```
>> interp2(x,y,z,1,1,'linear')
```

```
ans =  
2.7986
```

```
>> interp2(x,y,z,5,5,'linear',0)
```

```
ans =  
0
```

```
>> interp2(x,y,z,[-0.5,0.2],...  
[-0.4,1],'spline')
```

```
ans =  
3.3018 4.2221
```

```
>> interp2(x,y,z,[0 1;0 1],...  
[1 1;0 0],'nearest')
```

```
ans =  
5.5830 1.9727  
0.1215 3.0044
```

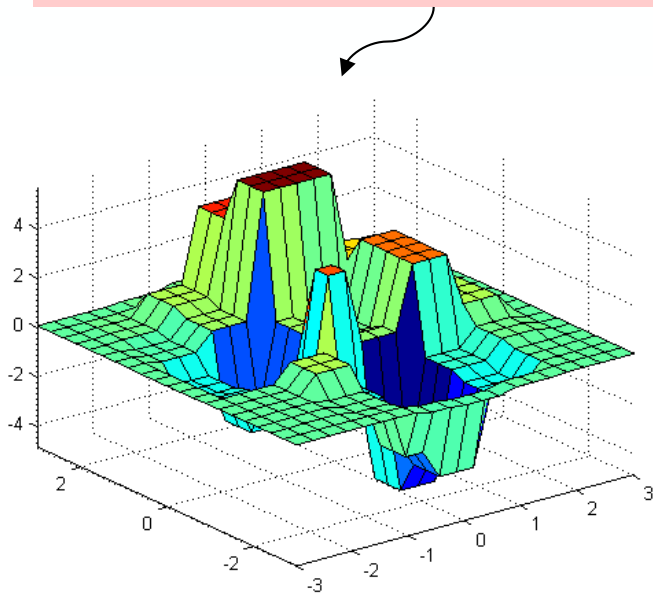


二維插值法的範例 (2/2)

```
>> [xi,yi]=meshgrid(-3:0.3:3);
```

```
>> z0=interp2(x,y,z,xi,yi,...  
    'nearest');
```

```
>> surf(xi,yi,z0);axis tight
```

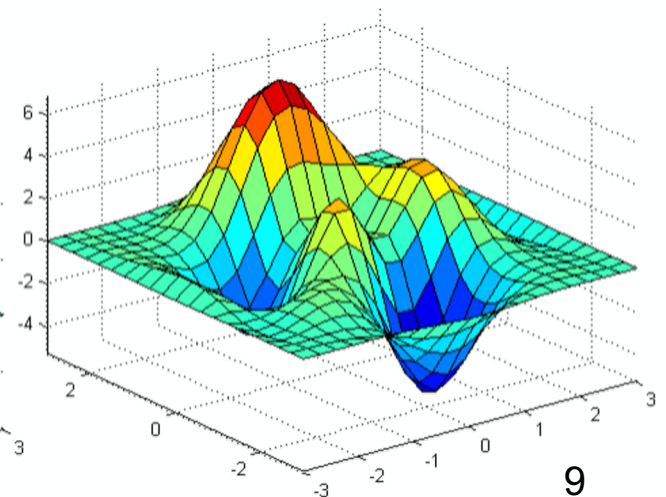
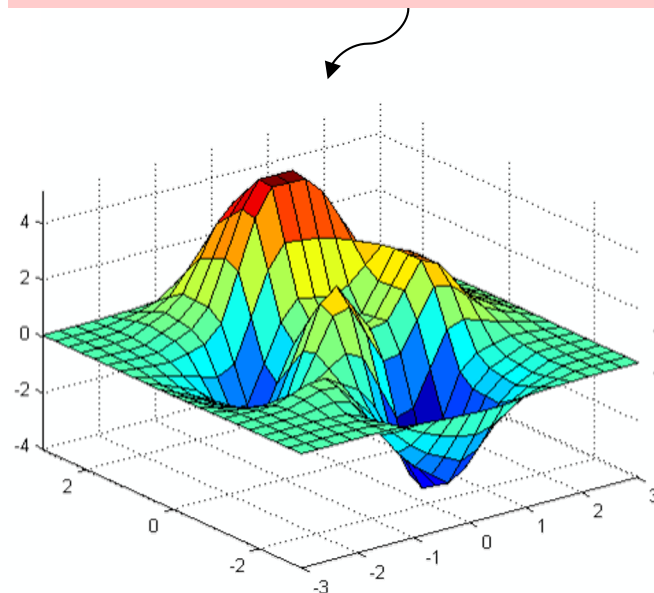


```
>> z2=interp2(x,y,z,xi,yi,...  
    'spline');
```

```
>> surf(xi,yi,z2);axis tight
```

```
>> z1=interp2(x,y,z,xi,yi,...  
    'linear');
```

```
>> surf(xi,yi,z1);axis tight
```



多維插值法

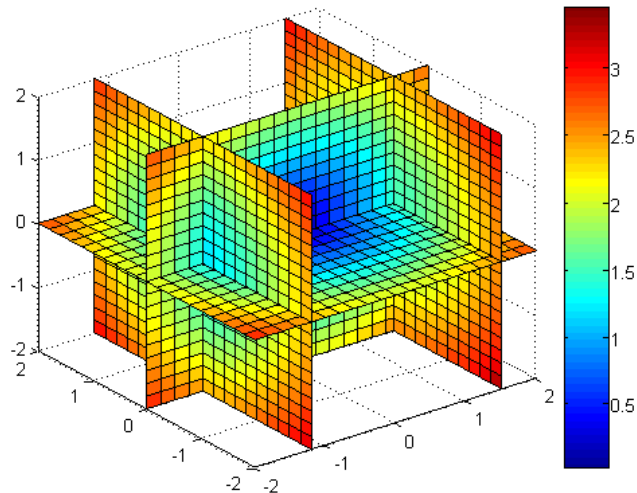
- `interp3()` 與 `interp $n$ ()` 分別用來計算三維與 n 維的插值

表 13.2.3 三維與三維以上的多維插值法

函 數	說 明
<code>interp3(x,y,z,w,x_i,y_i,z_i, 'method')</code>	已知數據資料 $w = f(x,y,z)$ ，以所指定的方法，求解 $x = x_i$ 、 $y = y_i$ 與 $z = z_i$ 時所相對應的 w_i 之值
<code>interp3(x,y,z,w,x_i,y_i,z_i, 'method', val)</code>	同上，但如果插點的值超出範圍時，則以 val 的值當成插值
<code>interpn(x₁,x₂,...,w, y₁,y₂,..., 'method')</code>	已知數據資料 $w = f(x_1, x_2, \dots)$ ，以所指定的方法，求解 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots$ 時所相對應的 w_i 之值
<code>interpn(x₁,x₂,...,w, y₁,y₂,..., 'method', val)</code>	同上，但如果插點的值超出範圍時，則以 val 的值當成插值

三維插值法的範例

```
>> x=-2:0.2:2; y=-2:0.2:2;  
    z=-2:0.2:2;  
  
>> [x1,x2,x3]=meshgrid(x,y,z);  
  
>> w=sqrt(x1.^2+x2.^2+x3.^2);  
  
>> slice(x1,x2,x3,w,...  
        [-1.2,1.5],0,0);colorbar
```



$$w(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

```
>> sqrt(0.35^2+0.17^2+0.64^2)  
ans =  
    0.7490
```

```
>> interp3(x1,x2,x3,w,0.35,0.17,...  
    0.64,'linear')  
ans =  
    0.7575
```

```
>> interp3(x1,x2,x3,w,0.35,0.17,...  
    0.64,'spline')  
ans =  
    0.7490
```

二維的散佈點內插 (1/2)

表 13.3.1 二維散佈式資料點插值法

函 數	說 明
<code>griddata(x,y,z,x_i,y_i,'method')</code>	已知資料數據橫座標 x 、縱座標 y 與高度 $z = f(x,y)$ 所組成的向量，以所指定的方法求解 $x = x_i$ 與 $y = y_i$ 時所相對應的 z_i 之值，其中 <i>method</i> 可為 nearest: 鄰近點插值法 linear: 線性插值法（預設） cubic: 三次多項式插值法

```
>> x=10*rand(1,100)-5;
```

```
>> y=10*rand(1,100)-5;
```

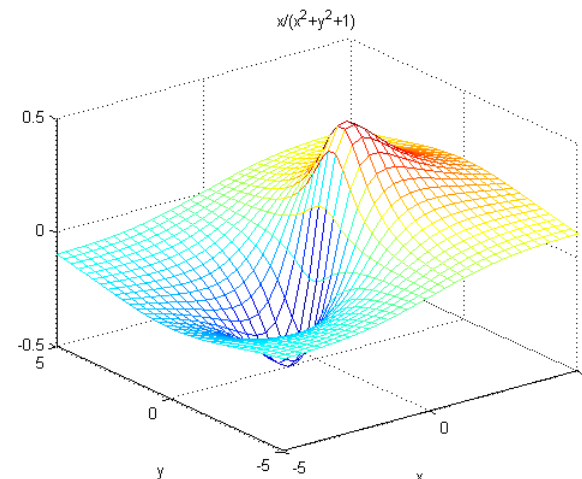
```
>> z=x./(x.^2+y.^2+1);
```

```
>> griddata(x,y,z,1,1)
```

```
ans =
```

```
0.2759
```

```
>> ezmesh('x/(x^2+y^2+1)', [-5,5], 32)
```



二維的散佈點內插 (2/2)

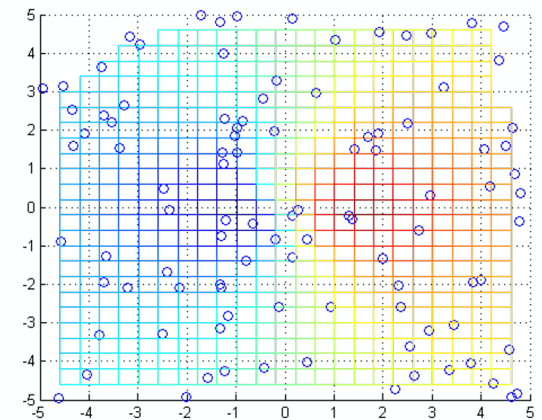
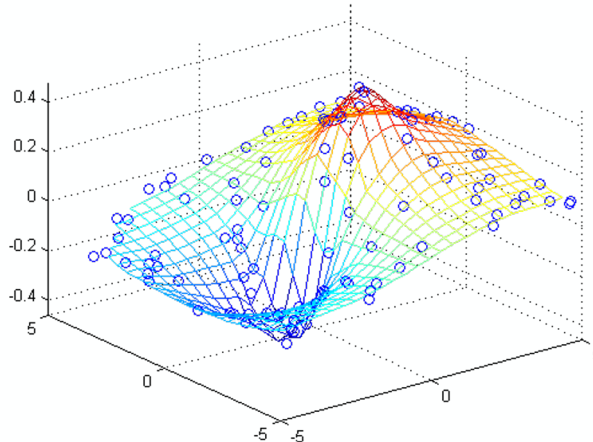
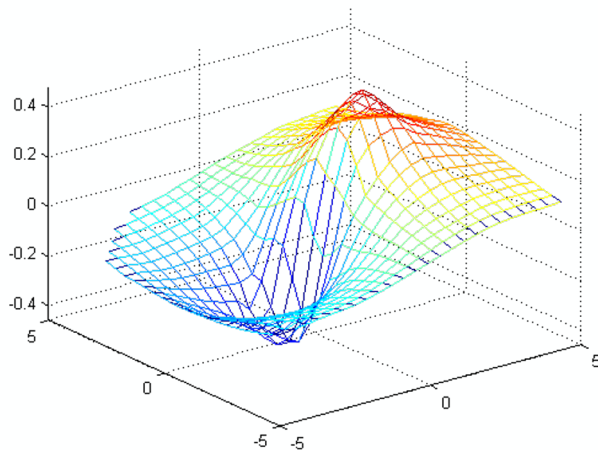
```
>> [xx,yy]=meshgrid(-5:0.4:5,-5:0.4:5);
```

```
>> zz=griddata(x,y,z,xx,yy,'cubic');
```

```
>> mesh(xx,yy,zz);axis tight;...  
hold on; hidden off
```

```
>> plot3(x,y,z,'o');hold off
```

```
>> view(0,90)
```



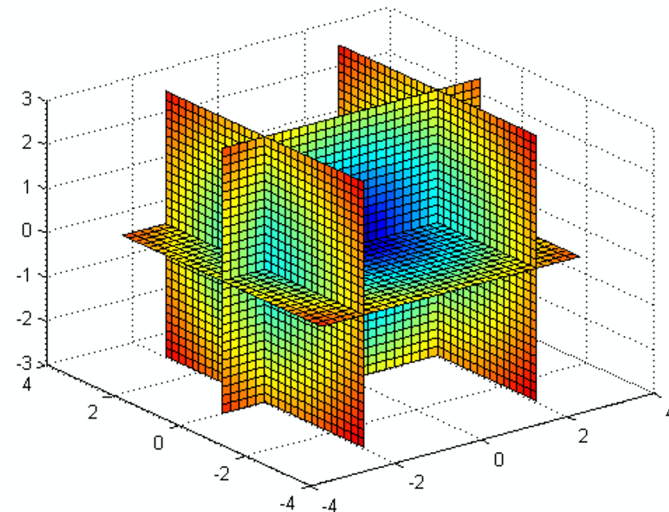
三維的散佈點內插 (1/2)

表 13.3.2 三維散佈式資料點插值法

函 數	說 明
<code>griddata(x,y,z,w,xi,yi,zi,'method')</code>	已知資料數據 $w = f(x, y, z)$ ，以所指定的方法，求解 $x = x_i$ ， $y = y_i$ 與 $z = z_i$ 時所相對應的 w_i 之值。其中 <i>method</i> 可為 nearest: 鄰近點插值法 linear: 二維線性插值法（預設）

```
>> rng(999);  
>> x=6*rand(1,100)-3;  
>> y=6*rand(1,100)-3;  
>> z=6*rand(1,100)-3;  
>> w=sqrt(x.^2+y.^2+z.^2);  
>> sqrt(1^2+1^2+2^2)  
ans =  
    2.4495  
>> griddata(x,y,z,w,1,1,2)  
ans =  
    2.6229  
>> sp=-3:0.2:3;  
>> [xi,yi,zi]=meshgrid(sp,sp,sp);  
>> ww=sqrt(xi.^2+yi.^2+zi.^2);
```

```
>> slice(xi,yi,zi,ww,[-2,2],0,0)
```



三維的散佈點內插 (2/2)

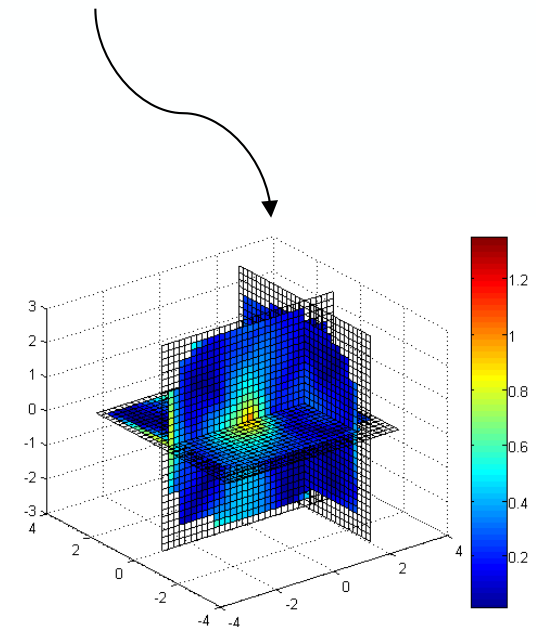
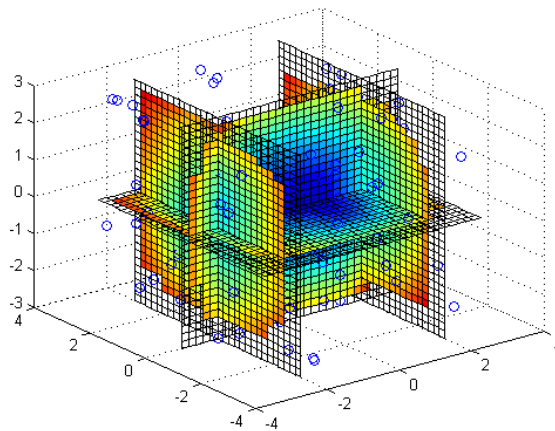
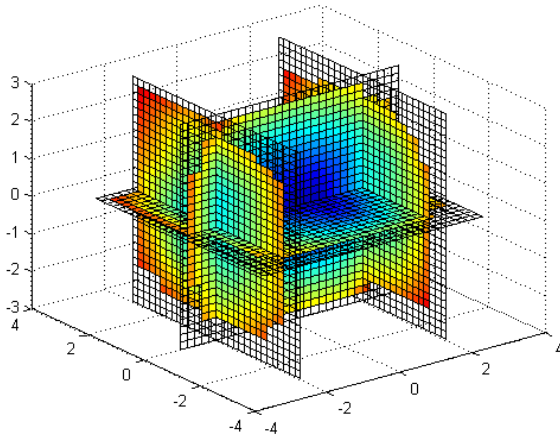
```
>> wi=griddata(x,y,z,w,xi,yi,zi);
```

```
>> slice(xi,yi,zi,wi,[-2,2],0,0);
```

```
>> hold on
```

```
>> plot3(x,y,z,'o');hold off
```

```
>> slice(xi,yi,zi,abs(wi-ww),2,0,0);  
colorbar
```



A large, yellow, torn-edge shaped graphic element in the top-left corner of the slide.

The End

